F4. Tenzorinvariánsok, a deriválttenzor felbontása és invariánsai

F4.1. Általános feltételek

A skalár-, vektor- és tenzormennyiségeket a koordináta rendszer megválasztása nem befolyásolhatja: azok a koordináta-transzformációval szemben invariánsak. A transzformáció során csak a vektorok vagy tenzorok koordinátái változhatnak. Minthogy a tenzorok maguk is invariánsak, találhatunk velük kapcsolatos további vektor-, tenzor- vagy skalárinvariánsokat. Tekintsük az $L(R^n, R^n)$-beli lineáris operátorokat, amelyeket tenzoroknak, vagy másodrendű tenzoroknak nevezzük. Nézzük meg, hogyan definiálhatjuk az invariáns (koordináta-rendszertől független) mennyiségeket! (*Magasabb rendű tenzorok esetén hasonló elvek szerint járunk el.*)

Legyen R ($\mathbf{r_i} \in R, (i = 1, 2, ..., n)$) és S (n) az $r_i \in R, (i = 1, 2, ..., n)$ n-dimenziós vektortér (R^n) egy-egy bázisa. Legyen adott továbbá a $\mathbf{T}$ invertálható koordináta-transzformáció, ami az R bázisból az S bázisba történő áttérést írja le, azaz:

$$\mathbf{Tr_i} = \mathbf{s_i} \quad (i = 1,2,...,n)$$

Legyen az $\mathbf{A}$ tenzor egy tetszőleges L-beli lineáris leképezés, s az azt reprezentáló $\lfloor \mathbf{A} \rfloor_R$, $\lfloor \mathbf{A} \rfloor_S$ mátrix az R és az S bázis szerint. (*Az* $\mathbf{A}$ *tenzor független a koordináta-rendszer választásától, a mátrixa viszont függ attól*). A tenzorok invariáns tulajdonsága miatt teljesül:

$$\lfloor \mathbf{A} \rfloor_S = \lfloor \mathbf{T}^{-1} \rfloor_R \lfloor \mathbf{A} \rfloor_R \lfloor \mathbf{T} \rfloor_R .$$

Az $f([\mathbf{X}]) \in \mathbf{R}$ $(\mathbf{X} \in L)$ skalárfüggvényt akkor nevezzük invariánsnak, ha minden R , S bázisra és $\mathbf{A}$ tenzorra fennáll a következő összefüggés:

$$f(\lfloor A \rfloor_S) = f(\lfloor \mathbf{A} \rfloor_R),$$

Vagyis teljesül, hogy

$$f(\lfloor \mathbf{T}^{-1} \rfloor \cdot \lfloor \mathbf{A} \rfloor \cdot \lfloor \mathbf{T} \rfloor) = f(\lfloor \mathbf{A} \rfloor).$$

A $\mathbf{g}([\mathbf{X}]) \in L(\mathbf{X} \in L)$ mátrixfüggvényt akkor mondjuk invariánsnak, ha minden R , S bázisra és $\mathbf{A}$ tenzorra:

$$\mathbf{g}(\lfloor \mathbf{A} \rfloor_S) = \lfloor \mathbf{T}^{-1} \rfloor \cdot \mathbf{g}(\lfloor \mathbf{A} \rfloor_R) \cdot \lfloor \mathbf{T} \rfloor,$$

azaz ha $\mathbf{g}$ az $\mathbf{A}$ mátrixával együtt transzformálódik.

A vektorfüggvények hasonlóságához az kell, hogy az eredményül kapott vektor a bázisokhoz hasonlóan transzformálódjon az *R* rendszerből az *S* rendszerbe.

F4.2. A deriválttenzor felbontása

F4.2.1. A deriválttenzor és sajátosságai

A $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény deriváltja, az ún. deriválttenzor (lásd a 2. fejezetet is):

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dr}} = \mathbf{D}(\mathbf{r}) \ .$$

A $\dfrac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dr}}$ egy formális kifejezés, ahogy azt a Hamilton-féle differenciáloperátornál is láttuk, s nem tekinthető a differenciálok hányadosának. A $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r})$, vagy bármilyen $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ tenzor-vektor függvény egy ún. tenzorteret határoz meg. Ilyen például a feszültségi-, vagy az alakváltozási tenzortér.

A deriválttenzor mátrixát a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor egyes komponenseinek (u, v, w) térbeli megváltozása alapján adhatjuk meg a Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} .$$

Tekintsük a $\mathbf{dv} = \mathbf{D}\mathbf{dr}$ kifejezéssel megadott homogén lineáris függvényrendszert, ahol $\mathbf{dr}$ a helyvektor változása! Ez a felírás kettős értelmezésre ad módot: egyrészt koordináta-transzformációnak tekinthető, másrészt tértranszformációnak, vagyis mozgásnak.

A deriválttenzor előállítható a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ és a nabla operátor (∇) diadikus szorzataként is. A vektorokra illetve a mátrix elemeire vonatkozó indexes jelölést alkalmazva:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e_i} \cdot v_i = v_i, \qquad \nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

és

$$\mathbf{D} = (\mathbf{v} \circ \nabla) = (\nabla \circ \mathbf{v})^{*} \text{ , illetve } D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \text{ ,}$$

A tenzor transzponáltjára a * jelölést alkalmazzuk.

F4.2.2. Vektorszámítási alapok, visszatekintés

Egy tetszőleges $\mathbf{A}$ tenzor $\mathbf{A}^*$ transzponáltját, tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektor mellett

$$\mathbf{uAv} = \mathbf{vA^*u}$$

módon értelmezzük. Az $\mathbf{A}^*$ egyértelműen meghatározott, és mátrixa

$$A_{ij}^{*} = \mathbf{e_i A^* e_j} = \mathbf{e_j A e_i} = A_{ji} \text{ ,}$$

vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix főátlóra vonatkozó tükörképe. A transzponált mátrixra teljesülnek a következő összefüggések:

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A} \text{ , } (\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \pm \mathbf{B}^*, \ (\lambda \mathbf{A})^* = \lambda \mathbf{A}^* \text{ , } (\mathbf{BA})^* = \mathbf{A}^* \mathbf{B}^* \text{ ,}$$

ahol $\mathbf{B}$ egy tetszőleges tenzor, λ pedig egy skalár.

Elevenítsük fel az ismereteinket az $\mathbf{A}$ tenzor diadikus előállításával kapcsolatban is! A diadikus előállítás nem más, mint az $\mathbf{A}$ tenzor $\mathbf{a_j} = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$ vektorkomponensének és az $\mathbf{e_j} = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{2j})$ egységvektornak e sorrendbe vett diadikus szorzata

$$\mathbf{A} = \mathbf{a_j} \circ \mathbf{e_j} = [a_{ij} \delta_{kj}] = [a_{ik}] \text{ ,}$$

ahol δ_{ij} az ún. Kronecker-féle függvény, melynek értéke:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ ha } i \neq j \\ 1, \text{ ha } i = j \end{cases} \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3) \text{ .}$$

Definíció szerint:

$$\mathbf{a_1} \circ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a_2} \circ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a_3} \circ \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Következésképp: bármely $\mathbf{A}$ tenzor előállítható az $\mathbf{a_j} \circ \mathbf{e_j}$ diádok összegeként.

$$\mathbf{A} = \mathbf{a_1} \circ \mathbf{e_1} + \mathbf{a_2} \circ \mathbf{e_2} + \mathbf{a_3} \circ \mathbf{e_3} \; .$$

Hasonló megfontolásokkal, a transzponált mátrix definíciója és diagonális szorzata alapján teljesül, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{e_1} \circ \mathbf{a_1^*} + \mathbf{e_2} \circ \mathbf{a_2^*} + \mathbf{e_3} \circ \mathbf{a_3^*} \; ,$$

ahol

$$\mathbf{a_j^*} = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}) = (a_{1j}^*, a_{2j}^*, a_{3j}^*) \; .$$

A következő lépésben a tenzorok felbontásával kapcsolatos ismereteket tekintjük át. Ez az invariánsok megadásában lesz fontos.

Állítás. Minden tenzor, így a deriválttenzor is felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegére. E felbontás egyértelmű.

A bizonyítás előtt elevenítsük fel a szimmetrikus és az antiszimmetrikus tenzorok fogalmát! Az $\mathbf{A}$ tenzort szimmetrikusnak (tükrösnek) mondjuk, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, következésképp

$$\mathbf{uAv} = \mathbf{vAu} \; ,$$

és mátrixa szimmetrikus a főátlóra

$$A_{ij} = \mathbf{e_i A e_j} = \mathbf{e_j A e_i} = A_{ji} \; .$$

Az $\mathbf{A}$ tenzort antiszimmetrikusnak (váltónak) nevezzük, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$, következésképp

$$\mathbf{uAv} = -\mathbf{vAu} \, .$$

A mátrix főátlójára nézve tükrös, elemeiben előjelváltó. A főátlóbeli elemek nullák ($A_{kk} = 0$).

$$A_{ij} = \mathbf{e_i A e_j} = -\mathbf{e_j A e_i} = -A_{ji} \; .$$

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ szimmetrikus és az $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$ antiszimmetrikus tenzort! Ekkor felírható, hogy

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*) = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a ,$$

ahol $\mathbf{A}_s$ szimmetrikus, $\mathbf{A}_a$ pedig antiszimmetrikus tenzor. A felírásból az is következik, hogy a felbontás egyértelmű.

F4.2.3. A deriválttenzor felbontása

A fenti tétel értelmében a deriválttenzor is felírható egy szimmetrikus $\mathbf{D_s}$ és egy antiszimmetrikus $\mathbf{D_a}$ tenzor összegeként.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}^*) = \mathbf{D_s} + \mathbf{D_a} \ .$$

Nézzük meg a tenzorokat reprezentáló mátrixok alakját! A deriválttenzor transzponáltja:

$$\mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla \circ \mathbf{v} \ .$$

A $\mathbf{D_s}$ szimmetrikus tenzor alakja:

$$\mathbf{D_s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \ .$$

A $\mathbf{D_a}$ antiszimmetrikus tenzor alakja:

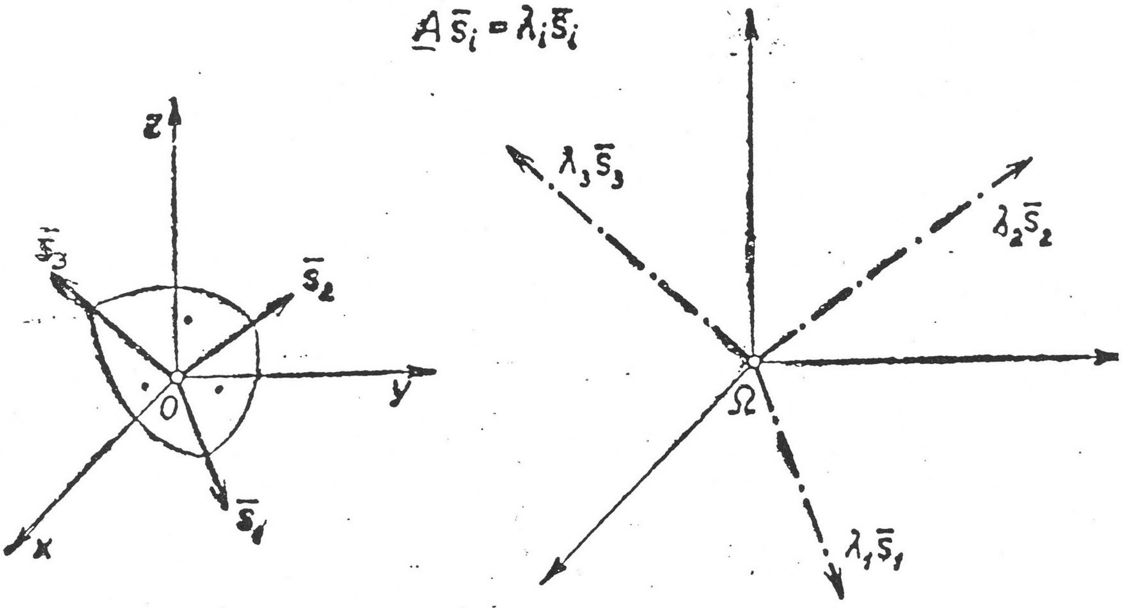
$$\mathbf{D_a} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} \ .$$

F4.3. A tenzorok szimmetrikus és az antiszimmetrikus részének jellemzése, elméleti alapok

F4.3.1. Skalárinvariánsok

A deriválttenzor szimmetrikus részének – s általában a szimmetrikus tenzorok – elemzéséhez, a skalárinvariánsok megadásához felhasználjuk a tenzorszámítás egyik alaptételét, az ún. főtengely-tételt. Ez minden olyan tenzorra igaz, aminek a szimmetrikus része nem nulla. Először ezt az állítást nézzük!

Tétel. Minden szimmetrikus $\mathbf{A}_s$ tenzor létesítette $\mathbf{A}_s\mathbf{r}$ affin (összeg és aránytartó) leképezés-nél (a háromdimenziós térben) legalább három egymásra merőleges $\mathbf{s}_i$ sajátvektor megtartja az irányát, és csupán nyújtást-zsugorítást és tükrözést szenvedhet a λ_i sajátérték mértékében (1. ábra): $\mathbf{A}_s\mathbf{s}_i = \lambda_i\mathbf{s}_i$.



1. ábra. Az $\mathbf{A}_s$ szimmetrikus tenzor sajátvektorai a Descartes-féle koordináta-rendszerben.

Az egységvektorok és a sajátértékek ismeretében az $\mathbf{A}_s$ szimmetrikus tenzor diadikus előállítása:

$$\mathbf{A}_s = \lambda_1\mathbf{s}_1\circ\mathbf{s}_1 + \lambda_2\mathbf{s}_2\circ\mathbf{s}_2 + \lambda_3\mathbf{s}_3\circ\mathbf{s}_3\ ,$$

amit az $\mathbf{A_s}$ szimmetrikus tenzor spektrálfelbontásának nevezünk, a λ_1, λ_2, λ_3 értékhármast pedig $\mathbf{A_s}$ spektrumának. A főtengely-tétel által kijelölt sajátérték-feladat alakja:

$$(\mathbf{A_s} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{s_i} = 0 \ ,$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

A triviálistól ($0,0,0$) különböző sajátértékek megadása egy lineáris egyenletrendszer megoldását igényli.

$$\det(\mathbf{A_s} - \mathbf{E}\lambda_i) = |\mathbf{A_s} - \mathbf{E}\lambda_i| = \begin{vmatrix} a_{s11} - \lambda_i & a_{s12} & a_{s13} \\ a_{s21} & a_{s22} - \lambda_i & a_{s23} \\ a_{s31} & a_{s32} & a_{s33} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

ahol $\det(\mathbf{A_s}) = |\mathbf{A_s}| \neq 0$. A fenti egyenletet λ hatványai szerint rendezve egy harmadfokú egyenlet (az ún. karakterisztikus egyenlet) adódik a sajátértékek meghatározására:

$$-(\lambda^3 - A_{sI}\lambda^2 + A_{sII}\lambda + A_{sIII}) = 0 \ .$$

A karakterisztikus egyenlet együtthatói az $\mathbf{A_s}$ tenzor skalárinvariánsai. Mivel minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegére, továbbá mivel az antiszimmetrikus tenzornak ($\mathbf{A_a}$) nincsenek skalárinvariánsai, hiszen

$$\mathbf{v}\mathbf{A_a}\mathbf{v} = -\mathbf{v}\mathbf{A_a}\mathbf{v} = 0 \ ,$$

ezért általában is igaz, hogy tetszőleges $\mathbf{A}$ nem antiszimmetrikus tenzor skalárinvariánsai:

$$A_I = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ ,$$

$$A_{II} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \ ,$$

$$A_{III} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \ .$$

Az $\mathbf{A}$ tenzor első skalárinvariánsa A_I a mátrix főátlóbeli elemeinek összege, azaz a mátrix „nyoma” az angolban meghonosodott „trace” elnevezés alapján. Matematikában a spur kifejezést alkalmazzák: $A_I = \mathrm{spur}\,\mathbf{A}$.

Az A_{II} invariáns Az $\mathbf{A}$ tenzor adjungáltjának nyoma. *Az adjungált mátrix* ($\mathrm{adj}\,\mathbf{A}$) *az* $\mathbf{A}$ *előjeles aldeterminánsaiból készített mátrix transzponáltja. Az adjungált mátrix az inverz mátrix meghatározásánál (inverz, vagy „visszafele történő" leképezésnél) nyer értelmet.*

Az A_{III} invariáns az $\mathbf{A}$ affin leképezésnél bekövetkező térfogattorzulást adja meg, azaz $\mathbf{A}$ determinánsa. *Megjegyezzük, ha* $\det \mathbf{A} \neq 0$*, akkor létezik az A inverze, ami az adjungált mátrix és a determinánsnak a hányadosa* ($\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{adj}\mathbf{A}/\det \mathbf{A}$), *és teljesül, hogy*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}\,.$$

F4.3.1.1. Skalárinvariánsok geometriai szemléltetése

A skalárinvariánsok szemléletes képét kapjuk, ha tekintjük az $\mathbf{A}$ affin (*egyenestartó*) leképezést és az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorokat. Az egyszerűség kedvéért képzeljük el, hogy a vektorok a Descartes-rendszerbeli elemi megváltozások

$$\mathbf{u} \equiv \Delta\mathbf{x}\,,\ \mathbf{v} \equiv \Delta\mathbf{y}\,,\ \mathbf{w} \equiv \Delta\mathbf{z}\,,$$

s ezek segítségével írjuk fel az invariánsokat.

$$A_I = \frac{1}{\mathbf{u}\cdot[\mathbf{v}\times\mathbf{w}]}\left[(\mathbf{A}\mathbf{u})\cdot[\mathbf{v}\times\mathbf{w}] + \mathbf{u}[(\mathbf{A}\mathbf{v}\times\mathbf{w}] + \mathbf{u}[\mathbf{v}\times(\mathbf{A}\mathbf{w})]\right]\ ,$$

$$A_{II} = \frac{1}{\mathbf{u}[\mathbf{v}\times\mathbf{w}]}\left[(\mathbf{A}\mathbf{u})\cdot[(\mathbf{A}\mathbf{v})\times\mathbf{w}] + (\mathbf{A}\mathbf{u})\,[\mathbf{v}\times(\mathbf{A}\mathbf{w}] + \mathbf{u}\cdot[(\mathbf{A}\mathbf{v})\times(\mathbf{A}\mathbf{w})]\right]\ ,$$

$$A_{III} = \frac{1}{\mathbf{u}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{w}]}\left[(\mathbf{A}\mathbf{u})\cdot[(\mathbf{A}\mathbf{v}\times(\mathbf{A}\mathbf{w})]\right]\ .$$

(Az első invariánsban a hossz-, a másodikban a felület-, a harmadikban a térfogatváltozások szerepelnek.) E kifejezések függetlenek az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorhármas választásától, feltéve, hogy $\mathbf{u}[\mathbf{v}\times\mathbf{w}] \neq 0$.

Megjegyezés. Ha az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorhármas helyett a Descartes-rendszerbeli egységvektorokat vesszük ($\mathbf{u} \equiv \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{e}_2$, $\mathbf{w} \equiv \mathbf{e}_3$), akkor visszakapjuk a skalárinvariánsokra kapott előző meghatározást. Ennek belátásához a tenzorok diadikus előállítását kell alkalmaznunk!

F4.3.2. A tenzor vektorinvariánsa

Egy $\mathbf{A}$ általános tenzor $\mathbf{a}$ vektorinvariánsán – megállapodás szerint – antiszimmetrikus részének ($\mathbf{A}_\mathbf{a}$), az

$$\mathbf{A_a} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -(a_{21} - a_{12}) & (a_{13} - a_{31}) \\ (a_{21} - a_{12}) & 0 & -(a_{32} - a_{23}) \\ -(a_{13} - a_{31}) & (a_{32} - a_{23}) & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{E} ,$$

alakját értjük, ahol az $\mathbf{a}$ vektorinvariáns:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} .$$

A vektorinvariáns jelentése szerint:

$$\mathbf{A_a r} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} .$$

E felírásból következik, hogy a vektorinvariáns tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektortól függetlenül állítható elő.
Megjegyzés. Tetszőleges $\mathbf{b}$ vektor és $\mathbf{A}$ tenzor $\mathbf{C} = \mathbf{b} \times \mathbf{A}$ vektoriális szorzatát, ami egy antiszimmetrikus tenzor lesz, a következőképpen értelmezzük:

$$\mathbf{Cr} = \mathbf{b} \times (\mathbf{Ar}) .$$

$$\mathbf{C} = \lfloor C_{ij} \rfloor = \lfloor \mathbf{e_i C e_j} \rfloor = \lfloor \mathbf{e_i} \lfloor \mathbf{b} \times (\mathbf{A e_j}) \rfloor \rfloor = \lfloor \mathbf{e_i}(\mathbf{b} \times \mathbf{a_j}) \rfloor ,$$

ahol $\mathbf{a_j}$ az $\mathbf{A}$ tenzor diadikus előállításakor kapott *j*-edik vektor.

Ha $\mathbf{E}$ az egységtenzor, akkor

$$\mathbf{C} = \vec{B} \times \mathbf{E}$$

És

$$\mathbf{C} = \left[C_{ij}\right] = \left[\vec{e}_i \left\{\vec{B} \times (\mathbf{E}\vec{e}_j)\right\}\right] = \left[\vec{e}_i(\vec{B} \times \vec{e}_j)\right] = \left[\vec{B}(\vec{e}_j \times \vec{e}_i)\right] = \begin{pmatrix} 0 & -B_3 & B_2 \\ B_3 & 0 & -B_1 \\ -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

vagyis az előállítás független a koordináta-rendszer választásától.

F4.3.3. A tenzorok egy másik felbontása: a nyújtás-zsugorítás-tükrözés mint invariáns mennyiség

A tenzorokat különbözőképpen bonthatjuk fel aszerint, hogy milyen típusú invariánsokat szeretnénk leírni. Korábban láttuk a szimmetrikus és asszimmetrikus tenzorra való felbontást. Most egy másikat nézzünk. Bármely $\mathbf{A}$ tenzor felbontható egy izometrikus $\mathbf{M}$ tenzor és egy szimmetrikus $\mathbf{S}$, illetve $\mathbf{T}$ tenzor szorzatára a következőképpen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{MS} = \mathbf{TM}.$$

Az $\mathbf{M}$ létesítette leképezés a szimmetrikus $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ tenzor (egyik) sajátvektor-rendszerét beforgatja az ugyancsak szimmetrikus $\mathbf{AA}^*$ tenzor (egyik) sajátvektor-rendszerébe. A forgatás mátrixa a sajátvektor-rendszerek ismeretében számítható.
A szimmetrikus $\mathbf{S}$, illetve $\mathbf{T}$ tenzor „felelős” az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, illetve a $\mathbf{AA}^*$ sajátvektorai irányában történő nyújtásért, zsugorításért, illetve tükrözésért. Teljesül továbbá, hogy

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{A}^*\mathbf{A} \ , \qquad \mathbf{T}^2 = \mathbf{AA}^* \ .$$

Emlékeztetőül tekintsük át az *izometrikus tenzorok* jelentését! Az $\mathbf{M}$ tenzorral megadott affin leképezés izometrikus (mértéktartó), ha bármely $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorra eleget tesz az

$$(\mathbf{Mu})\cdot(\mathbf{Mv}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$$

függvényegyenletnek. Ha $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, akkor

$$(\mathbf{Mu})^2 = (\mathbf{u})^2 \ ,$$

vagyis

$$|\,\mathbf{Mu}\,| = |\,\mathbf{u}\,|.$$

Az $\mathbf{M}$ leképezés megtartja a vektorok hosszát, a skalárszorzás értelmezése miatt pedig szögtartó. Két ilyen affin leképezés van: a merevtestszerű forgás és a (pontra, egyenesre, síkra vonatkozó) tükrözés. Az $\mathbf{M}$ tenzor közönséges, mert csak a nullvektort viszi át önmagába. Létezik az $\mathbf{M}^{-1}$ reciprok tenzor, ami megegyezik az $\mathbf{M}^*$ transzponált tenzorral.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (\mathbf{Mu})\cdot(\mathbf{Mv}) = \mathbf{v}\mathbf{M}^*(\mathbf{Mu}) = \mathbf{v}(\mathbf{M}^*\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \ .$$

A skaláris szorzat tulajdonsága miatt: $\mathbf{M}^*\mathbf{M} = \underline{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{E}$.

F4.4. A derivälttenzor skalár- és vektorinvariánsai

A skalár- és vektorinvariánsok megismerése után nézzük a derivälttenzor invariánsait!
A skalárinvariánsokat a deriválttenzor szimmetrikus tenzorösszetevőjéből kapjuk. (Mivel a deriválttenzort $\mathbf{D}$-vel jelöljük, ezért az invariánsoknál a D_I, D_{II}, D_{III} jelölést alkalmazzuk.)
A skalárinvariánsok meghatározásakor a

$$(\mathbf{D_s} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{s_i} = 0 \ ,$$

sajátérték-feladatot kell megoldani. Az eredmény:

$$\lambda_i = \frac{\partial V_i}{\partial (x_s)_i} \ ,$$

ahol $(\mathrm{d}x_s)_i$ az $\mathbf{s_i}$ sajátvektorrendszer i -edik komponensének az irányába eső elemi megváltozás. V_i a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor i -edik komponense.

F4.4.1. Skalárinvariánsok

A korábban bevezetett jelölések szerint ismét felírhatjuk a skalárinvariánsokat:

$$D_I = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{div}\,\mathbf{v} = \mathrm{spur}\,\mathbf{D_s} \ ,$$

$$D_{II} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \mathrm{spur}\,\mathrm{adj}\mathbf{D_s} \ ,$$

$$D_{III} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det \mathbf{D_s} \ .$$

Természetesen általános esetben pl. a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = D_I = \mathrm{const}$$

összefüggésből nem következik, hogy az egyes összeadandók is megegyeznek.

A divergenciát korábban már előállítottuk integrálalakban. Nézzük meg ezt az előállítást a deriválttenzor felhasználásával!

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dF} = \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} (\mathbf{v_0} + \mathbf{Ddr})\mathbf{dF} = \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} (\mathbf{Ddr})\mathbf{dF} = \mathrm{div}\,\mathbf{v} = D_I$$

A fenti kifejezés belátásához tegyük fel, hogy ΔV térfogatelem egy kocka, s az egymással szembelevő oldalain, pl. az x tengely mentén a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-veltor függvény értéke az x_0 pontban $\mathbf{v_0}$, az $(x_0 = \Delta x)$ pontban ($\mathbf{v_0} + \mathbf{Di} \cdot \Delta x$). A két szembelevő oldalon az eltérő irányítottság miatt a felületi integrál értéke:

$$\int_{\Delta y \cdot \Delta z} \mathbf{Di} \cdot \Delta x \cdot \mathbf{dF} = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta V \ .$$

Hasonlóképpen járunk el a másik két koordináta-irányban is.

F4.4.2. A derivélttenzor vektorinvariánsa

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3\right] = \frac{1}{2}\mathbf{rot\,v} \ ,$$

vagyis:

$$(\mathbf{D} - \mathbf{D}^*)\mathbf{dr} = 2\mathbf{D}_a\mathbf{dr} = \mathbf{rot\,v} \times \mathbf{dr} \ .$$

A rotáció a deriválttenzor vektorinvariánsa. Erről szintén be lehet mutatni az integrál-előállítás alkalmazásával is – hasonlóan a divergenciához –, hogy független a koordináta-rendszer választásától:

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \times \mathbf{v} = \frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \times (\mathbf{v}_0 + \mathbf{Ddr}) = \frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \times (\mathbf{Ddr}) = \frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \times [(\mathbf{d} \times \mathbf{E})\mathbf{dr}] =$$

$$\frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta F} \mathbf{dF} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{dr}) = \frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta F} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{dr})\mathbf{d} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{dr}]dF = \frac{1}{\Delta V}\mathbf{d}\, 3 \cdot \Delta V - \frac{1}{\Delta V}\mathbf{d}\, \Delta V = 2\mathbf{d} = \mathbf{rot\,v}$$

.

F4.5. A deriválttenzor geometriai értelmezése, alakváltozások

A $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ deriválttenzor a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ leképezés során megadja az $\mathbf{r}$ hely tetszőleges kis környezetében bekövetkező, lokális hossz-, értelem- (tükrözés) és szögváltozásokat, illetve a különböző dimenziójú lokális mértéktorzulásokat. (Természetesen ezek a megváltozások nem egymástól függetlenek, mert pl. egy lokális hosszváltozás egyben mértéktorzulás is.) Nézzük meg az egyes változásokat!

i.) A *nyújtás-zsugorítás-tükrözés* értelmezéséhez a deriválttenzort bontsuk fel – a korábbiak alapján – egy izometrikus és egy szimmetrikus tenzor szorzatára.

$$\mathbf{D} = \mathbf{MS} \ , \qquad \mathbf{S}^2 = \mathbf{D}^*\mathbf{D} = (\mathbf{S}^*)^2$$

A $\mathbf{D}$ tenzorú affin leképezés a $\mathbf{D}^*\mathbf{D}$ sajátvektorai irányában vett nyújtás-zsugorítás-tükrözés ($\mathbf{S}$) és a $\mathbf{D}^*\mathbf{D}$ sajátvektor rendszerét a $\mathbf{DD}^*$ sajátvektor rendszerébe átvivő merevtestszerű forgatás ($\mathbf{M}$) szuperpozíciójaként nyerhető.

A következőkben (i-vi) a relatív hossz-, felület- és térfogatváltozást tekintjük. Ez nem más, mint egy koordináta transzformáció.

Megjegyezzük, ha a folyamat során egy vizsgált $\mathbf{dr}$ vektor nagysága és iránya nem változik, akkor a deriválttenzor reprezentációja az egységtenzor. $|\mathbf{D}| = 1$. Ha a deriválttenzort mint tértranszformációt, vagyis mint mozgást értelmeznénk, s arra a kérdésre keresnénk a választ, hogy változott-e a $\mathbf{dr}$ szakasz mentén a relatív sebességi mező, akkor erre a válasz nem, hiszen a $\mathbf{dr}$ szakasz minden pontja ugyanakkora sebességgel rendelkezik.

ii.) A $\mathbf{dr} = \mathrm{d}r \cdot \mathbf{n}$ vektor *relatív hosszváltozása*. Bevezetve a deriválttenzorra vonatkozó $\mathbf{Ddr} = \mathbf{dv}$ jelölést, a relatív hosszváltozás:

$$\frac{|\mathbf{dv}| - \mathrm{d}r}{\mathrm{d}r} = |\mathbf{Dn}| - 1 \ .$$

Megjegyezzük, hogy itt a deriválttenzort mint koordináta-transzformációt tekintjük.

iii.) A $\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2$ paralelogramma *relatív területváltozás*a:

$$\frac{|\mathbf{dv}_1 \times \mathbf{dv}_2| - |\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2|}{|\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2|} = |\mathbf{D}_* \mathbf{n}_\perp| - 1 \ ,$$

ahol

$$\mathbf{n}_\perp = \frac{\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2}{|\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2|} ,$$

továbbá $\mathbf{D}_*$ a $\mathbf{D}$ tenzor ún. duális tenzor alakja:

$$\mathbf{D}_* = D_{II}\mathbf{E} - D_I \mathbf{D}^* + (\mathbf{D}^*)^2 \ .$$

Itt D_I , D_{II} , D_{III} a $\mathbf{D}$ deriválttenzor skalárinvariánsai.

iv.) A $(\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2) \cdot \mathbf{dr}_3$ térfogatú paralelopipedon relatív térfogatváltozása:

$$\frac{|(\mathbf{dv}_1 \times \mathbf{dv}_2) \cdot \mathbf{dv}_3| - |(\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2) \cdot \mathbf{dr}_3|}{|(\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2) \cdot \mathbf{dr}_3|} = D_{III} - 1 \ .$$

A következőkben (v) a relatív megnyúlást és (vi) a relatív szögváltozást vizsgáljuk. A deriválttenzort mint tér-transzformációt vizsgáljuk. Itt ha egy vektor ugyanakkora marad, nem történik változás, nincs relatív mozgás, akkor a deriválttenzor értéke nulla lesz.

e.) Relatív megnyúlás

$$\varepsilon_{nn} = \frac{|\mathbf{dr} + \mathbf{dv}| - \mathrm{d}r}{\mathrm{d}r} ,$$

ahol $\mathbf{dr}$ és $\mathbf{dv} = \mathbf{Ddr}$ egymással párhuzamosak, (megnyúlásról van szó). Kihasználva, hogy

$$1 >> \frac{|\mathbf{dv}|}{|\mathbf{dr}|} = \frac{|\mathbf{Ddr}|}{|\mathbf{dr}|} \geq \mathrm{arctg}\frac{|\mathbf{Ddr}|}{|\mathbf{dr}|} = \max \gamma$$

és alkalmazva a $\dfrac{\mathbf{dr}}{\mathrm{d}r} = \mathbf{n}$ jelölést

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\sqrt{(\mathbf{dr} + \mathbf{dv})^2} - \mathrm{d}r}{\mathrm{d}r} \approx \frac{\sqrt{(\mathrm{d}r)^2 + 2 \cdot \mathbf{dr}\ (\mathbf{Ddr})}}{\mathrm{d}r} - 1 =$$

$$= \sqrt{1 + 2\mathbf{nDn}} - 1 \approx (1 + \frac{1}{2} 2 \cdot \mathbf{nDn}) - 1 = \mathbf{nDn} = \mathbf{nD_s n} \quad ,$$

mert $\mathbf{nD_a n} = 0$. $\mathbf{n}$ tetszőleges irányt jelölhet. Abban az esetben, ha a koordináta-tengelyek irányába eső relatív nyújtást vizsgáljuk, akkor: $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$, vagyis a deriválttenzor szimmetrikus részének a főátlóban levő elemeit kapjuk.

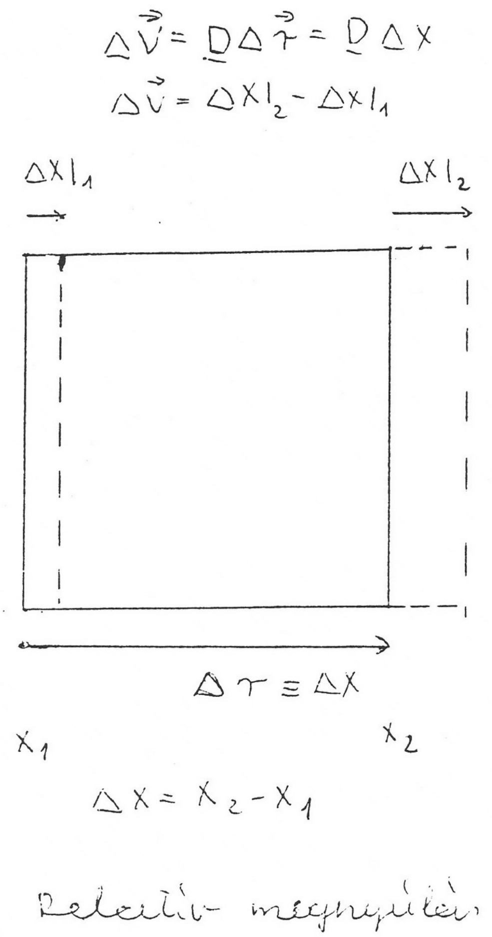
Megjegyezzük, hogy itt a deriválttenzort mint tértranszformációt, vagyis mint egy mozgás eredményét tekintjük.

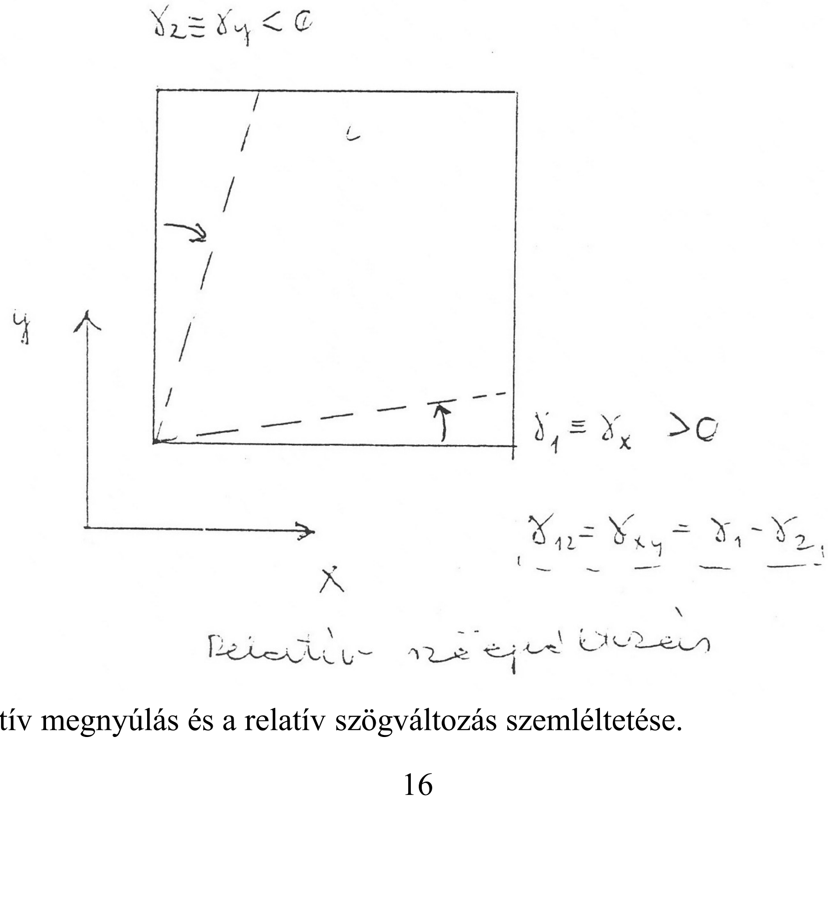
iv.) *Relatív szögváltozás*:

$$\gamma_{n_1 n_2} = \gamma_{n_1} - \gamma_{n_2} \approx \mathrm{tg}\gamma_{n_1} - \mathrm{tg}\gamma_{n_2} \approx \frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{dv}_1}{\mathrm{d}r_1} + \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{dv}_2}{\mathrm{d}r_2} = \frac{\mathbf{n}_2(\mathbf{Ddr}_1)}{\mathrm{d}r_1} + \frac{\mathbf{n}_1(\mathbf{Ddr}_2)}{\mathrm{d}r_2} =$$

$$= \mathbf{n}_2\mathbf{Dn}_1 + \mathbf{n}_1\mathbf{Dn}_2 = \mathbf{n}_1(\mathbf{D} + \mathbf{D}^*)\mathbf{n}_2 = 2 \cdot \mathbf{n}_1\mathbf{Dn}_2 .$$

Az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ nem feltétlenül a főirányokat jelöli, de $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$. Természetesen $\gamma_{n_1 n_2} = \gamma_{n_2 n_1}$.





2. ábra. A relatív megnyúlás és a relatív szögváltozás szemléltetése.

A Descartes-rendszerben a koordináta-irányok szerinti relatív szögváltozásokat írjuk fel.

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \equiv \gamma_{12} = \gamma_{21} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) ,$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} \equiv \gamma_{13} = \gamma_{31} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ,$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} \equiv \gamma_{23} = \gamma_{32} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) .$$