II. Matematikai alapok, jelölések

A jegyzet matematikai eszköztára erősen támaszkodik a vektorszámítás és az analízis órákon tanultakra. Ez a fejezet nem helyettesítheti a megfelelő matematikai alapozást, itt csupán a legfontosabb alapfogalmak felelevenítése a célunk.

II.1. Jelölések

A jegyzetben a vektorokat és vektormezőket kis, vastag, egyenes, a mátrixokat nagy, vastag, egyenes betűkkel jelöljük, pl. $\mathbf{s}, \mathbf{v}, \mathbf{A}$. A komponensek és paraméterek dőltek : s, A_{ij}. A sebességre és komponenseire a meteorológia szakirodalmában megszokott $\mathbf{v}(u, v, w)$ jelölést alkalmazzuk.

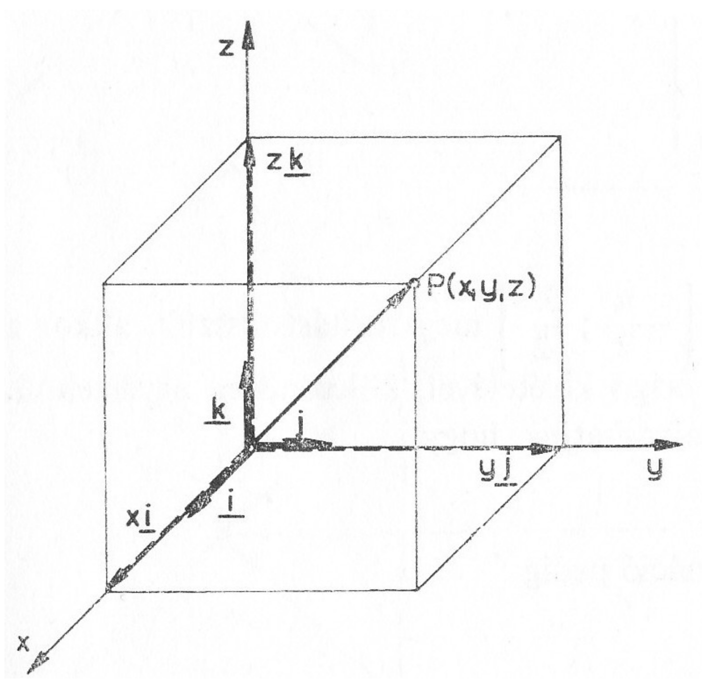
II.2. Vektorműveletek, vektorfüggvények

II.2.1. Vektorok és koordináták

Jelölje E^3 a tér pontjainak a halmazát, amelyben a vizsgált folyamat lezajlik. Ahhoz, hogy a folyamatot matematikailag le tudjuk írni, kiválasztunk egy kezdőpontot (origó) a térben. Felveszünk továbbá három egymásra merőleges egységnyi hosszúságú vektort: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$, amelyek jobbsodrású rendszert alkotnak. Tekintsük azt a vektort, amely az origóból a tér valamely P pontjába mutat. Ezt a P pont helyvektorának nevezzük, és $\mathbf{r}$-rel jelöljük. A vektorszámításból ismeretes, hogy három, nem egy síkba eső vektor az E^3 térben bázist alkot, tehát az $\mathbf{r}$ helyvektor egyértelműen előáll az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

alakban (1. ábra). Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ vektorok rendszerét Descartes-féle bázisnak nevezzük, az x, y és z együtthatókat pedig az $\mathbf{r}$ helyvektor Descartes-féle koordinátáinak nevezzük.



1. ábra. A Descartes-féle koordináta-rendszer. Fekete-Zalay: Többváltozós függvények analízise. Példatár. Budapest, 1985, p. 9.

Ilyen módon a tér pontjait számhármasokkal ($\Re^3$ elemeivel) azonosítottuk. Megforditva: $\Re^3$ elemeinek is egyértelműen megfeleltethetünk egy pontot a térben, azaz

$\mathbf{r} = (x, y, z)$,

ahol egy E^3 -beli és egy $\Re^3$ -beli elem közé írtunk egyenlőségjelet.

A fizikában számos vektormennyiséget használunk, ilyen pl. a sebesség és az erő. Ha a tér rögzített P pontjában fújó $\mathbf{v}$ szélsebességvektort szeretnénk jellemezni, ezt is felbonthatjuk a Descartes-féle bázisban, és azonosíthatjuk számhármassal.

Egy térvektort egyértelműen jellemez a hossza és az iránya. Emlékeztetőül: az $\mathbf{a} \in E^3$ vektor hosszán az

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

számot értjük.

Megjegyezzük, hogy a választott bázis, amelyben dolgozunk, függhet az adott térbeli ponttól és az időtől is.

II.2.2. Skaláris, vektoriális, vegyes szorzat

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatának az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \gamma$$

számot nevezzük, ahol γ a két vektor által közbezárt szög.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel jelölt vektort nevezzük, amely merőleges az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor által kifeszített síkra, azokkal jobbsodrású rendszert alkot, továbbá hosszúsága megegyezik a két vektor által meghatározott paralelogramma területével, azaz

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \gamma .$$

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatán az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ számot értjük.

II.3. Többváltozós függvények

A légköri folyamatok matematikai leírásában igen gyakran többváltozós függvényekkel dolgozunk. Az ideális gáznak tekintett levegő termodinamikai jellemzőit pl. két független állapothatározó függvényében adhatjuk meg. A légköri folyamatok a bennünket körülvevő fizikai térben játszódnak le, ezért a leírásukra alkalmazott skalár- és vektormennyiségek függnek a helytől és az időtől is. Ha a tér pontjait valamely bázisban dolgozva számhármasokkal azonosítottuk, pl. a Descartes-féle bázisban az (x, y, z) hármassal, akkor ezek a skalár- és vektormennyiségek x, y és z, valamint az idő (t) függvényének, azaz négyváltozós függvényeknek tekinthetők. A meteorológiában a levegő állapothatározóinak a változásait vizsgáljuk. Ehhez szükséges a többváltozós függvények deriválásával kapcsolatos fogalmak ismerete, amelyeket a következő fejezetben tekintünk át.

II.3.1. Többváltozós függvények differenciálása

Az egyváltozós valós függvények deriváltjának a fogalma kiterjeszthető többváltozós valós függvényekre is. Először a kétváltozós függvények differenciálásának alapfogalmait foglaljuk össze, majd ismertetjük a skalármezők és vektormezők fogalmát és a differenciálásukkal kapcsolatos tudnivalókat.

II.3.1.1. Kétváltozós, valós értékű függvények differenciálása

Az f függvényt kétváltozós valós függvénynek nevezzük, ha értelmezési tartománya a valós számsíknak, tehát $\Re^2$-nek a részhalmaza, képhalmaza pedig $\Re$. Ezt az $f : \Re^2 \to \Re$ szimbólummal jelöljük. (A fogalmak többsége három- és többváltozós függvényekre is átvihető.)

Egy $f : \Re^2 \to \Re$ függvény x szerinti parciális deriváltját az f értelmezési tartományának egy (x_0, y_0) belső pontjában a következő határértékkel definiáljuk, amennyiben ez a határérték létezik és véges:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Ez a határérték azt mutatja meg, hogy az (x_0, y_0) pont környezetében az x tengellyel párhuzamos irány mentén milyen meredek a függvény. Ennek mintájára értelmezhető ebben a pontban az y szerinti parciális derivált is:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

A parciális deriváltak értéke függ attól, hogy melyik (x_0, y_0) pontban számítjuk ki. Azt a függvényt, amely minden (x, y) ponthoz hozzárendeli az (x_0, y_0) (ill. y) szerinti parciális deriváltat, az f függvény x (ill. y) szerinti parciális deriváltfüggvényének nevezzük. Amennyiben ezek is parciálisan differenciálhatók, képezhetjük mindkét változó szerint újabb parciális deriváltjaikat. Így a másodrendű parciális deriváltakat kapjuk. Ezek jelölése:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

A középsők az ún. vegyes parciális deriváltak. Ezek egyenlősége nem szükségszerű! Azonban, ha f az egész tartományon kétszer folytonosan differenciálható, akkor a tartomány minden (x, y) pontjában érvényes a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

egyenlőség, azaz a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek. A fizikában ezt hallgatólagosan mindig feltételezzük.

Jelölje $\mathbf{x}$ az (x, y) vektort. Az f függvényt differenciálhatónak nevezzük értelmezési tartományának valamely $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ belső pontjában, ha létezik olyan $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ vektor, amelyre

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{d} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0.$$

A $\mathbf{d}$ vektort az f függvény $\mathbf{x}_0$-beli deriváltjának (vagy gradiensének) nevezzük. Jelölése: $f'(\mathbf{x}_0)$ vagy **grad**$f(\mathbf{x}_0)$. Belátható, hogy ha f differenciálható, akkor létezik mindegyik parciális deriváltja, és a derivált előáll ezek sorvektoraként, azaz

$$f'(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \right).$$

Megjegyezzük, hogy a parciális deriváltak létezéséből nem következik, hogy a függvény differenciálható. A parciális derviáltak létezése és folytonossága azonban már elégséges az f differenciálhatóságához.

A derivált fenti definíciójából következik, hogy ha $\mathbf{x}$ kellően közel van $\mathbf{x}_0$-hoz, akkor egy deriválható függvény megváltozása ezen két pont között jól közelíthető a következő kifejezéssel:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \approx f'(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \cdot (y - y_0).$$

Vegyük eszre, hogy ez nem más, mint a derivált definíciójában a számlálóban szereplő $\mathbf{d} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ skaláris szorzat. Másképpen, bevezetve a $\Delta f(\mathbf{x}_0) := f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$, $\Delta x := x - x_0$ és $\Delta y := y - y_0$ jelöléseket, a függvény megváltozása közelítőleg

$$\Delta f(\mathbf{x}_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta y.$$

Kevésbé precízen, nem tüntetve fel még azt sem, hogy a parciális deriváltakat hol kell érteni, ezt szokásos a következő formában írni:

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

A fizikában ennek használatos egy „végtelenül kicsi” $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ mennyiségekkel felírt változata is, ahol a két oldal közé egyenlőségjelet írunk:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Ezt a formális kifejezést az f függvény teljes differenciáljának nevezzük.

Általában, ha p és $q: \Re^2 \to \Re$ típusú adott függvények, akkor értelmezhető $\mathrm{d}f$ analógiájára egy

$$p(x,y)\,\mathrm{d}\,x + q(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

típusú kifejezés. Felmerülhet a kérdés: van-e olyan f függvény, amely mellett ez a $\mathrm{d}f$ -et jelenti az (x,y) pontban? A kérdés úgy is megfogalmazható, hogy létezik-e olyan $F:\Re^2 \to \Re$ függvény, amelyre

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p(x,y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = q(x,y),$$

azaz $F' = (p,q)$.

Amennyiben p és q megfelelően sima (egyszer folytonosan differenciálható) függvények, és létezik a fenti tulajdonságú F függvény, akkor F vegyes parciális deriváltjainak egyenlőségéből következik, hogy

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Belátható, hogy ha a p és q értelmezési tartománya megfelelő tulajdonságú (ún. csillagszerű tartomány, ilyen pl. a teljes $\Re^2$), akkor ezen két derivált egyenlősége elégséges is F létezéséhez. A gyakorlatban általában feltételezzük a szóban forgó függvények megfelelő simaságát, ezért a fenti feltételt alkalmazzuk annak eldöntésére, hogy teljes differenciált kaptunk-e.

II.3.1.2. Skalármező differenciálása

Ha egy u -val jelölt függvénykapcsolattal E^3 egy D részhalmazának minden pontjához hozzárendelünk egy valós számot, skalármezőt értelmeztünk:

$$u: D \to \Re, \; D \subset E^3.$$

(Ilyen pl. a hőmérséklet mint a hely függvénye.) Erre a következő jelölést is alkalmazhatjuk:

$$u: \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}), \; \mathbf{r} \in D.$$

Láttuk, hogy a Descartes-féle bázisban dolgozva az $\mathbf{r} \in E^3$ pontot, amely az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egységvektorok segítségével $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakban írható fel, az $(x, y, z) \in \Re^3$ elemmel azonosíthatjuk. Így az $u : D \to \Re$ skalármező egy háromváltozós függvénnyel azonosítható, amelyet jelöljünk átmenetileg *f*-fel:

$$u : \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D_f \subset \Re^3.$$

Az egyenlőségjel itt két különböző típusú függvény értéke között áll, tehát azonosítást jelent.

Legyen pl. az u függvény az $u : \mathbf{r} \mapsto |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} \in E^3$, azaz minden vektorhoz a hosszát rendelje.
Ekkor a megfelelő f függvény az $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Természetesen egy skalármezőt megadó háromváltozós függvény függ a bázis megválasztásától, azaz más-más bázisban más f függvény fog tartozni ugyanazon u skalármezőhöz. Ezt az $f : \Re^3 \to \Re$ függvényt kényelmi okokból szokásos ugyanúgy u -val jelölni, mint a skalármezőt. A továbbiakban tehát az $u : \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r})$ vektormező esetén az $u(x, y, z)$ jelölést is alkalmazzuk.

Az $u : \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in D$ függvényt a D tartomány $\mathbf{r}_0$ belső pontjában differenciálhatónak nevezzük, ha létezik olyan $\mathbf{d} \in E^3$ vektor, amelyre

$$\lim_{\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0} \frac{u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}_0) - \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 0.$$

Ez a kétváltozós függvények differenciálhatóságának a megfelelője, és a $\mathbf{d} \in E^3$ vektort itt is deriváltvektornak vagy gradiensvektornak nevezzük.

Igazolható, hogy ha az u skalármező folytonosan deriválható, akkor f -nek léteznek folytonos parciális deriváltjai, és a deriváltvektor a Descartes-féle koordináta-rendszerben a következő lesz:

$$\mathbf{grad}\ u(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Tehát a gradiensvektor Descartes-féle koordinátáit a megfelelő $f : \Re^3 \to \Re$ függvény x, y és z változók szerinti parciális deriváltjai adják.

II.3.1.3. Vektormező differenciálása

Ha E^3 egy D részhalmazának minden pontjához hozzárendelünk egy térvektort, vektormezőt értelmeztünk:

$$\mathbf{v}:\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}),\ \ \mathbf{r}\in D.$$

Ilyen pl. a szélsebességvektor a hely függvényében, vagy egy skalármező gradiense.

A Descartes-féle bázisban dolgozva a $\mathbf{v}:\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező egy $\Re^3 \to \Re^3$ függvényként adható meg:

$$\mathbf{v}:\mathbf{r} \mapsto v_1(x,y,z)\mathbf{i}+v_2(x,y,z)\mathbf{j}+v_3(x,y,z)\mathbf{k},\ \ \mathbf{r}\in D$$

A v_1, v_2 és $v_3:\Re^3 \to \Re$ függvényeket a $\mathbf{v}$ vektormező $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázishoz tartozó koordináta-függvényeinek nevezzük.

A vektormező deriváltjának értelmezéséhez szükségünk van a tenzor fogalmára. A továbbiakban tenzornak nevezünk egy E^3-ból E^3-ba képező lineáris függvényt. Tenzor pl. A

$$\mathbf{v}(\mathbf{r})=\mathbf{r},\ \ \mathbf{r}\in E^3,$$

azaz az E^3-ból E^3-ba képező identitásfüggvény. Mivel a tenzor értelmezési tartománya és értékkészlete (mindkettőben egy-egy bázist választva) azonosítható $\Re^3$-mal, a tenzornak megfeleltethető egy $F:\Re^3 \to \Re^3$ lineáris függvény. Ismeretes, hogy az ilyen típusú függvény nem más, mint egy 3×3-as mátrixszal való szorzás. Ez a mátrix függ attól, hogy milyen bázist használunk a $\mathbf{v}$ tenzor értelmezési tartományában és értékkészletében. Pl. az identitástenzor mátrixa a Descartes-féle bázis választása esetén a 3×3-as identitásmátrix lesz.

A $\mathbf{v}:\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}\in D$ vektormezőt a D tartomány egy $\mathbf{r}_0$ belső pontjában differenciálhatónak nevezzük, ha van olyan $\mathbf{A}$ tenzor, amelyre

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}\frac{\left|\mathbf{v}(\mathbf{r})-\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)-\mathbf{A}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right|}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|}=0.$$

Az $\mathbf{A}$ tenzort a vektormező $\mathbf{r}_0$ pontbeli deriválttenzorának nevezzük. Ha a $\mathbf{v}$ vektormező koordináta-függvényei a Descartes-féle bázisban v_1, v_2 és v_3, akkor a $\mathbf{v}$ vektormező deriválttenzorának (a Descartes-féle bázishoz tartozó) mátrixa

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

alakú.

II.4. Skalár- és vektormezők invariánsai

Az invariánsok olyan skalár- vagy vektormennyiségek, amelyek függetlenek a bázis megválasztásától, azaz csak az adott skalár-vagy vektormezőtől függnek. Számtalan invariáns mennyiség értelmezhető. Mi csak a legfontosabb, szemléletes fizikai tartalommal rendelkezőkkel foglalkozunk.

A skalármező korábban látott definíciója alapján világos, hogy a skalármező adott pontbeli gradiense független a bázis megválasztásától, tehát a gradiens a skalármező egy vektorinvariánsa.

A differenciálható vektormezők fontos skalárinvariánsa a divergencia. Legyen a $\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}\in D$ vektormező differenciálható az $\mathbf{r}_0\in D$ helyen. Az $\mathbf{r}_0$ pontbeli deriválttenzor sajátértékeinek az összegét a vektormező $\mathbf{r}_0$ pontbeli divergenciájának nevezzük. Ez nem más, mint a Descartes-féle bázisban felírt deriváltmátrix főátlóbeli elemeinek az összege, azaz

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\,.$$

Az a tény, hogy ez a skalármennyiség a vektormező invariánsa, azt jelenti, hogy a vektormező divergenciája csak magától a vektormezőtől függ, azaz független attól, hogy milyen bázisban vizsgálódunk. Ha a vektormező sebességmezőt jelent, akkor az $\mathbf{r}_0$ pontbeli divergenciája a sebességmező $\mathbf{r}_0$ pontbeli forrássűrűségét adja meg. (Ha egy pontban a divergencia pozitív, akkor ott szétáramlás, ha negatív, akkor összeáramlás van.)

A deriválttenzorból származtatható egy fontos vektorinvariáns is. A deriváltmátrix egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére. Az antiszimmetrikus mátrix elemeiből képzett

$$\mathbf{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

vektort a vektormező rotációjának nevezzük. (Valamely, a descartes-itől különböző bázisban természetesen mások lesznek a vektor koordinátái, de maga a vektor ugyanaz marad.) A rotáció vektormennyiség, tehát $\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező. Ha a vektormező sebességmező, akkor a rotáció a tér adott pontjában elhelyezkedő légrész forgómozgását jellemzi.

Ha bevezetjük a ∇ (nabla) szimbólummal jelölt jelképes vektort (nabla-vektor, nabla-operátor):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\,,$$

akkor ennek felhasználásával

- **grad** $u = \nabla u$ (formálisan skalárral való szorzás)
- div $\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ (skaláris szorzás)
- $\mathbf{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ (vektoriális szorzás).

A nabla-operátorral felírhatók a következő azonosságok. (Itt u, u_1, u_2 és $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ tetszőleges skalár- ill. vektormezőt jelöl.)

- $\nabla(u_1 + u_2) = \nabla u_1 + \nabla u_2$
- $\nabla(u_1 u_2) = u_2 \nabla u_1 + u_1 \nabla u_2$
- $\nabla \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \nabla \cdot \mathbf{v}_2$
- $\nabla \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \nabla \times \mathbf{v}_1 + \nabla \times \mathbf{v}_2$
- $\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = u\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla u$
- $\nabla \times (u\mathbf{v}) = u\nabla \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \nabla u$
- $\nabla \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{v}_2$
- $\nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_2$
- $\nabla(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times (\nabla \times \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_2 \times (\nabla \times \mathbf{v}_1)$
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$
- $\nabla \times (\nabla u) = 0$

- $\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$

A legutóbbi $\nabla \cdot (\nabla u)$ = div **grad** *u* kifejezést az u skalármező Laplace-kifejezésének nevezzük. A definícióból világos, hogy ez szintén invariáns mennyiség.

Később látni fogjuk, hogy a gradiens, a divergencia, a rotáció és a Laplace-kifejezés integrális alakban is felírható.

II.5. Integrálfogalmak

A fizikai alkalmazásokban fontosak a különböző térbeli alakzatokhoz (térgörbe, felület) kötődő integrálfogalmak. A matematikának ez a fejezete igen nehéz, a differenciálgeometriától kezdve az analízisig számos terület fogalmainak ismerete szükséges hozzá. Ezért itt nincs módunk a fogalmakat teljes részletességgel és pontossággal tárgyalni, csak vázlatos bevezetőt kívánunk nyújtani. A téma iránt mélyebben érdeklődő olvasónak Rudin (1978) könyvének 10. fejezetét ajánljuk.

Ismeretes, hogy az egyváltozós valós függvények Riemann-integrálja alsó- és felső közelítő összegek határértékeként, és azzal ekvivalensen Riemann-féle közelítő összegek határértékeként is értelmezhető. Ez utóbbit tudjuk általánosítani a térbeli alakzatokhoz kötődő integrálfogalmak értelmezésére.

II.5.1. A vonalintegrál

Tegyük fel, hogy a tér minden pontjához egy vektort rendeltünk, azaz adva van egy vektormező. Lehet ez pl. egy erőtér. Ha kíváncsiak vagyunk arra, hogy ebben az erőtérben mekkora egy adott térgörbe mentén végzett munka, akkor azt az erőtér vonalintegrálja mutatja meg a görbe mentén. A meteorológiában vonalintegrállal definiáljuk a cirkulációnak nevezett mennyiséget is: ez a sebességmező zárt görbére vett vonalintegrálja, és a levegő vagy a folyadék forgómozgásának leírására használatos.

Legyen $r:[a,b] \to E^3$ egy szakaszonként folytonosan differenciálható térgörbe, és $\mathbf{v}:\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ folytonos vektormező. A $\mathbf{v}:\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező r görbére vonatkozó vonalintegráljának az

$$\int_a^b \mathbf{v}(r(u)) \cdot r'(u)\,\mathrm{d}u$$

Riemann-integrált nevezzük. (Az integráljel mögötti kifejezés minden $[a,b]$-beli számhoz egy számot (skaláris szorzat) rendel, igy a szokásos Riemann-integrál értelmezhető.) Jelölése: $\int_r \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{s}$.

II.5.2. Felületi integrálok

A felületi integráloknak számos típusa létezik. Ezek közül a vektormező skalárértékű felületi integrálját részletesebben, a többi típust csak röviden ismertetjük.

II.5.2.1. Vektormező skalárértékű felületi integrálja

Legyen adva a $\mathbf{v}:\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező, és a térben egy Φ sima felület (azaz a felületet meghatározó függvény differenciálható). Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}$ folytonos. A $\mathbf{v}$ vektormező Φ felületre vett skalárértékű felületi integrálját a következőképpen értelmezzük:

1. A Φ felületet elemi felületdarabokra osztjuk (jól közelíthetők paralelogrammákkal). Jelölje a felületdarabok számát N.
2. Minden felületdarabon kiválasztunk egy tetszőleges ξ_i pontot, $i=1,2,\ldots,N$.
3. A vektormező ξ_i pontbeli értékét skalárisan szorozzuk az elemi felületdarabot közelítő paralelogramma $\Delta\mathbf{F}_i$ felszínvektorával:

   $$\mathbf{v}(\xi_i)\cdot\Delta\mathbf{F}_i$$

   (Ezen $\Delta\mathbf{F}_i$ vektor hossza a paralelogramma területe, iránya pedig merőleges a felületdarabra. Ha zárt a felület, akkor kifelé irányítjuk. Ha nem zárt, akkor valamelyik irányítást választjuk.)
4. Így minden felületdarabhoz kiszámoltunk egy skalár értéket, amelyeket összegzünk a teljes Φ felületre:

   $$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{v}(\xi_i)\cdot\Delta\mathbf{F}_i$$

5. Képezzük ezen összegek határértékét egyre finomodó felosztássorozatra. Ezt a számot nevezzük a $\mathbf{v}$ vektormező Φ felületre vett skalárértékű felületi integráljának. Jelölése: $\int_{\Omega}\mathbf{v}\,\mathrm{d}\,\mathbf{F}$

Alkalmazás: Ezt a típusú integrált alkalmazzák pl. a fizikában mágneses erőtér adott felületen átmenő fluxusának a kiszámítására, a meteorológiában pedig adott felületen átmenő tömegáram kiszámítására.

II.5.2.2. Skalármező vektorértékű felületi integrálja

Legyen adva az f skalárrmező, és a térben egy Φ sima felület. A skalármező vektorértékű felületi integrálját úgy kapjuk, hogy a felületet elemi felületdarabokra osztjuk, minden felületdarab felszínvektorát megszorozzuk a skalármező értékével az adott felületdarab valamely kiválasztott pontjában, és ezen vektorokat összegezzük a teljes Φ felületre. Ez egy integrálközelítő összeg, amely minden felosztáshoz egy vektor lesz, és a közelítő összegek határértékét az f skalármező vektorértékű felületi integráljának nevezzük. Jelölése: $\int\limits_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mathbf{F}$.

II.5.2.3. Vektormező vektorértékű felületi integrálja

Legyen adva a $\mathbf{v}:\mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormező, és a térben egy Φ sima felület. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}$ folytonos. A $\mathbf{v}$ vektormező Φ felületre vett vektorértékű felületi integrálját úgy kapjuk, hogy a felületet elemi felületdarabokra osztjuk, minden felületdarab felszínvektorát vektoriálisan megszorozzuk a vektormező értékével az adott felületdarab valamely kiválasztott pontjában, és ezen vektorokat összegezzük. Ezen közelítő összeg minden felosztáshoz egy vektor lesz, és a közelítő összegek határértékét a $\mathbf{v}$ vektormező vektorértékű felületi integráljának nevezzük. Jelölése: $\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}\mathbf{F} \times \mathbf{v}$.

Az említett integráloknál szokásos (de nem kötelező) az $\oint$ ill. $\oint\int$jelölés alkalmazása, ha zárt görbén ill. zárt felületen vett integrálról van szó.

II.5.3. Integrálátalakító tételek

A valós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-formulát általánosítjuk. Ismeretes, hogy ha az $f:\Re \to \Re$ függvény folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

azaz a függvény deriváltjának az integrálja az f-nek a halmaz határán való megváltozásával egyenlő.

Az egyik általánosítás a következő. Legyen Φ sima felület, amelyet egy Γ irányított görbe határol (a felszínvektorok irányából nézve Γ pozitív irányítású legyen).

Ha $\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ sima vektormező, akkor

$$\int_{\Phi} \mathbf{rot}\mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{F} = \int_{r} \mathbf{v}\, \mathrm{d}s,$$

azaz a $\mathbf{rot}\mathbf{v}$ (itt az $\mathbf{v}$-re alkalmaztunk egy differenciáloperátort) felületi integrálja egyenlő a felület határán a $\mathbf{v}$ vonalintegráljával.

A másik általánosítás: Legyen Φ zárt, sima felület, amely egy V térrészt vesz körül (a felszínvektorokat kifelé irányítjuk).

Ha $\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r})$ sima vektormező, akkor

$$\int_{V} \mathrm{div}\mathbf{v}\, \mathrm{d}V = \int_{\Phi} \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{F},$$

azaz a V tértartományon integrálva a $\mathrm{div}\mathbf{v}$ (egy másik differenciáloperátort alkalmaztunk a $\mathbf{v}$-re), ez az integrál a térrész határán vett felületi integrálba megy át.

II.5.4. Skalár- és vektormezők invariánsainak integrál-előállítása

A tanult invariáns mennyiségek a fenti integrálok segítségével is felírhatók.

II.5.4.1. A gradiens

Az f skalármező $\mathbf{r}_0$ pontbeli gradiensvektorát a

$$\mathbf{grad}_0 f = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} f\, \mathrm{d}\mathbf{F}$$

határérték adja meg, ahol ΔV az $\mathbf{r}_0$ pont körüli térrész térfogata, és ΔF az azt határoló zárt felület jele. Ha pl. f a nyomási mezőt jelöli, akkor ez a kifejezés az $\mathbf{r}_0$ pontbeli nyomási gradiens erőt adja meg. (A pont körüli térrészben egységnyi térfogatra ható nyomóerő határértéke, miközben a térrész a pontra zsugorodik.)

II.5.4.2. A Laplace-kifejezés

Figyelembe véve a gradiensvektor fenti integrál-előállítását és a Laplace-kifejezés definícióját, az f skalármező $\mathbf{r}_0$ pontbeli Laplace-kifejezése integrális alakban

$$\Delta_0 f = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{grad} f \, \mathrm{d}\mathbf{F} .$$

II.5.4.3. A divergencia

A $\mathbf{v}$ differenciálható vektormező divergenciája az $\mathbf{r}_0$ pontban előáll

$$\mathrm{div}_0 \mathbf{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{F}$$

alakban. A divergencia tehát nem más, mint a pont körüli tértartomány felületén átmenő, egységnyi térfogatra vett fluxus határértéke, miközben a térrész a pontra zsugorodik.

II.5.4.4. A rotáció

A $\mathbf{v}$ differenciálható vektormező rotációja az $\mathbf{r}_0$ pontban az

$$\mathbf{rot}_0 \mathbf{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \mathrm{d}\mathbf{F} \times \mathbf{v}$$

integrállal állítható elő.