

## IX. Navier–Stokes-egyenletek forgó koordináta-rendszerben

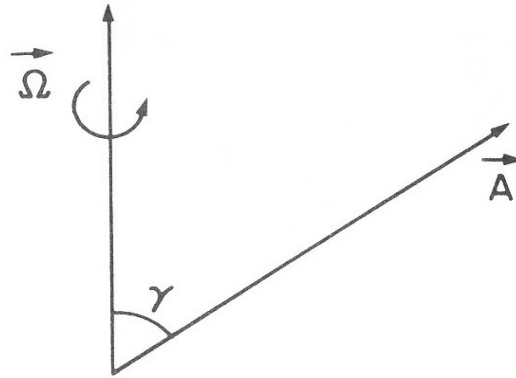
IX.1.	A koordináta-transzformáció.....	1
IX.2.	A mozgásegyenletek alakja a forgó Földön Descartes-féle koordináta-rendszerben.....	4
IX.2.1.	A forgó rendszerben fellépő tehetetlenségi erők.....	5
IX.2.2.	A nehézségi erő változása a földrajzi szélesség függvényében.....	6
IX.2.3.	Skalárok a forgó rendszerben.....	9
IX.2.4.	A Navier–Stokes-egyenletek.....	9
IX.2.5.	A hidro-termodinamikai egyenletrendszer forgó koordináta-rendszerben.....	10
IX.2.5.1	Az egyenletek Euler-szemléletmódban.....	10
IX.2.5.2	Az egyenletek Lagrange-szemléletmódban.....	11

A meteorológia a Földdel együtt forgó légkör mozgásrendszereit tanulmányozza. A különböző skálájú folyamatok leírásához, modellezéséhez a forgó koordináta-rendszerben felírt Navier–Stokes-egyenletek adják a kiinduló pontot. Mivel a Newton-törvények, és így a Navier–Stokes-egyenletek is inerciarendszerben érvényesek, először a törvényrendszer forgó koordináta-rendszerben érvényes alakját kell felírunk. Az egyszerűség kedvéért kiindulásként mind az inerciarendszerben, mind a forgó rendszerben derékszögű, Descartes-féle koordináta-rendszert veszünk fel. Ezeket a továbbiakban rendre abszolút és relatív koordinátarendszerek nevezzük.

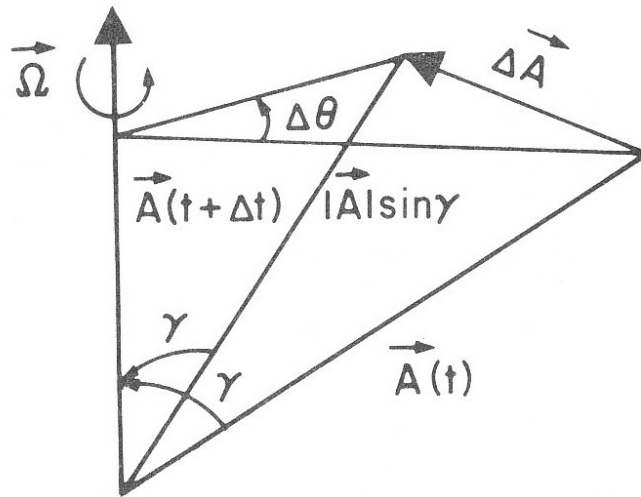
### IX.1. A koordináta-transzformáció

Ebben a fejezetben az abszolút és a relatív koordináta-rendszer közötti transzformációs szabályokat tárgyaljuk. A skalárok és a vektorok értéke (pl. hőmérséklet, nyomás, szélesség), illetve a skalárok teljes időbeli deriváltjai természetesen nem változnak az áttérés során; a vektorok koordinátás alakja azonban igen.

Végezzen a relatív koordináta-rendszer  $\Omega$  szögsebességű forgó mozgást! Határozzuk meg először a koordináta-rendszerrel együtt forgó  $\mathbf{A}$  állandó vektor abszolút koordináta-rendszerbeli sebességét. (1. és 2. ábra)



1. ábra.  $\mathbf{A}$  állandó hosszúságú vektor, amely  $\gamma$  szöget zár be a forgástengellyel. J. Pedlosky, 1987: Geophysical Fluid Dynamics. Springer Verlag. Fig. 5.1. 15 p.



2. ábra. Az  $\mathbf{A}$  vektor a  $t$  és  $t + \Delta t$  időpillanatban, valamint az infintezimális  $\Delta\mathbf{A}$  megváltozás. J. Pedlosky, 1987: Geophysical Fluid Dynamics. Springer Verlag. Fig. 5.2. 15 p.

Ekkor teljesül, hogy

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_r = 0, \quad \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_r = 0,$$

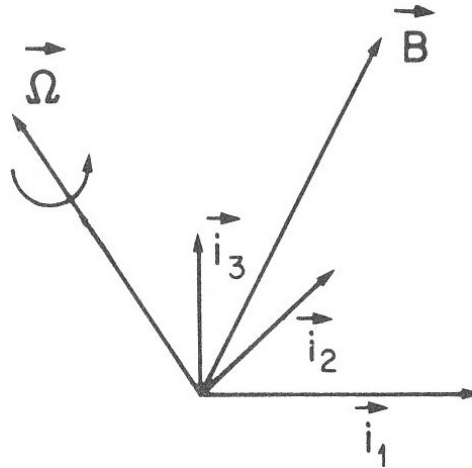
továbbá az abszolút rendszerben fennáll, hogy

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_a = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}.$$

Természetesen az abszolút rendszerben sem változik az  $\mathbf{A}$  vektor hossza.

$$\left(\frac{d|\mathbf{A}|^2}{dt}\right)_a = \left(2\mathbf{A} \frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_a = 2\mathbf{A}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}) = 0.$$

Tekintsünk most az  $\Omega$  szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben tetszőleges (térben és időben változó)  $\mathbf{A}$  vektort (3. ábra)! A relatív rendszerbeli egységvektorok iránya a tér minden pontjában ugyanaz (a relatív rendszer is Descartes-féle, és nem szférikus, vagy pl. henger koordináta-rendszer).



3. ábra. Az ortogonális koordináta-rendszer az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  bázis-egységvektorokkal és az  $\mathbf{A}$  vektorral. A koordináta-rendszer  $\Omega$  szögsebességgel forog a tengely körül. J. Pedlosky, 1987: Geophysical Fluid Dynamics. Springer Verlag. Fig. 5.3. 16 p.

Legyen az  $\mathbf{A}$  vektor a relatív rendszerben

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} .$$

Az  $\mathbf{A}$  vektor teljes időbeli megváltozása:

$$\left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_r = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} .$$

Fejezzük ki  $\mathbf{A}$  relatív rendszerbeli teljes időbeli megváltozását az abszolút rendszerben! Vegyük figyelembe, hogy a relatív rendszerbeli egységvektorok helyzete az abszolút rendszerből nézve folyamatosan változik!

$$\left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_a = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} + A_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} .$$

Mivel a skalárok teljes időbeli megváltozása független a koordináta-rendszer választásától, továbbá felhasználva a relatív rendszerbeli vektor állandók abszolút rendszerbeli reprezentációjára kapott korábbi  $\left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_a = \Omega \times \mathbf{A}$  kifejezést:

$$\left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_a = \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_r + A_x (\Omega \times \mathbf{i}) + A_y (\Omega \times \mathbf{j}) + A_z (\Omega \times \mathbf{k}) = \left( \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_r + \Omega \times \mathbf{A} .$$

## IX.2. ***A mozgásegyenletek alakja a forgó Földön Descartes-féle koordináta-rendszerben***

A mozgásegyenletek inerciarendszerben érvényesek, ugyanakkor az egyenletben a forgó rendszerhez képest vett relatív gyorsulást szeretnénk megjeleníteni. Fejezzük ki tehát az inercia-rendszerbeli gyorsulást a forgó rendszerhez képest vett relatív gyorsulással. Legyen adott a légrész  $\mathbf{r}$  helyvektora. A helyvektor abszolút rendszerben vett időderiváltja és a relatív rendszerbeli időderivált között az előző fejezet eredménye szerint a

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} .$$

összefüggés áll fenn.

Ennek megfelelően az abszolút és a relatív rendszerbeli sebességek közötti kapcsolat:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} .$$

Az abszolút és a relatív rendszerbeli gyorsulások közötti kapcsolatra pedig fennáll, hogy

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_a ,$$

ami az abszolút és a relatív rendszerbeli sebességek közötti összefüggés felhasználásával tovább alakítható:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_a &= \left(\frac{d(\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_r + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_r \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt}\right)_r + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_r \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) . \end{aligned}$$

A meteorológiai modellekben eltekintünk a Föld szögsebesség-változásától, így

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_r \times \mathbf{r} = 0 .$$

A gyorsulások közötti kapcsolatot kifejező egyenlet jobb oldalának utolsó tagja a centripetális gyorsulást adja meg (4. ábra).

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

A centripetális gyorsulás a körpályán mozgó részecskék sebességének irányát változtatja meg. A forgómozgás következménye, hogy a Földhöz rögzített rendszerben a kényszererő, illetve a testeket a Föld felé gyorsító erő nem egyezik meg a gravitációs erővel, és nem is a Föld középpontja felé mutat. Az eltérés magának a Föld anyagának eloszlására is visszahat. Ez az oka a Föld geoid alakjának.

### IX.2.1.

### A forgó rendszerben fellépő tehetetlenségi erők

Legyen  $\mathbf{F}$  valamely  $m$  tömegű testre ható erők eredője. A test mozgásegyenlete ekkor tetszőleges inerciarendszerben

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

A gyorsulás relatív gyorsulással kifejezett alakját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_a + m [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] + 2m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r).$$

Rendezzük át a mozgásegyenletet úgy, hogy a jobb oldalon csak a relatív gyorsulást tartalmazó tag maradjon:

$$\boxed{\mathbf{F} - m [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] - 2m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r) = m \mathbf{a}_a}.$$

Megállapíthatjuk, hogy az így kapott egyenlet a szokásos módon értelmezhető mozgásegyenletként, ha a bal oldalán negatív előjellel megjelenő tagokat fiktív erőkként értelmezzük. Ezek az erők rendre a következők:

$$\mathbf{F}_{Co} = -2m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r) = 2m(\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\Omega})$$

a forgó rendszerhez képest  $\mathbf{v}_r$  sebességgel mozgó testre ható ún. Coriolis-erő.

Az

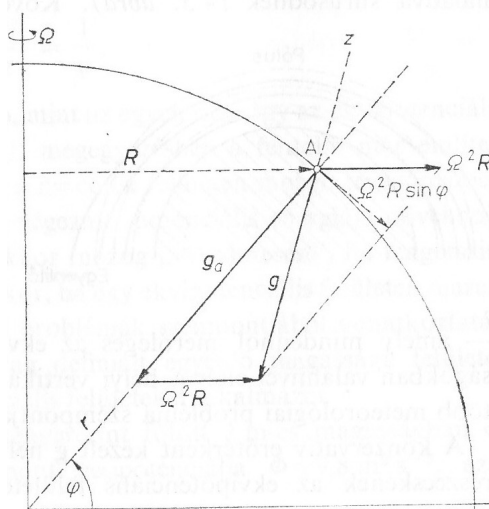
$$\mathbf{F}_{cf} = -m [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})]$$

centrifugális erőről egyszerűen kimutatható, hogy nagysága  $|\mathbf{F}_{cf}| = m\rho\Omega^2$ , ahol  $\rho$  a mozgó pontnak a forgástengelytől mért távolsága, iránya pedig a tengelytől kifelé mutat.

## IX.2.2.

## A nehézségi erő változása a földrajzi szélesség függvényében

A Föld felszínén mérhető nehézségi gyorsulás nagysága és iránya helyfüggő. Ennek számos oka van. Az okok között szerepelhet a Föld lapult alakja, a felszín kiemelkedései, az inhomogén közeteloszlás és még számtalan tényező. Az alábbiakban a Föld forgásából adódó hatást vizsgáljuk. Azért, hogy a fentiekben említett egyéb tényezőket elhanyagolhassuk, feltételezzük, hogy a Föld  $M$  tömegű, homogén tömegeloszlású,  $R$  sugarú gömb. Ekkor a Földön nyugvó testekre ható kölcsönhatási erők mellett csak a centrifugális erőt kell figyelembe venni.



4. ábra. A nehézségi erő változása a centrifugális erő következtében

Az ábra szerint a Föld felszínén, adott  $\varphi$  földrajzi szélességnél nyugvó testre a gravitációs vonzóerő és az  $\mathbf{N}$  nyomóerő hat. A Föld gyorsuló koordináta-rendszerében e két erő mellett a centrifugális erő is fellép, és a test a három erő hatására kerül nyugalomba. Írjuk fel a erőháromszögére a koszinusztételt:

$$N^2 = G_{90^\circ}^2 + (mr\omega^2)^2 - 2G_{90^\circ}(mr\omega^2)\cos\varphi,$$

ahol  $G_{90^\circ} = mg_{90^\circ}$  a sarkokon fellépő tömegvonzási erő, a 4. ábra alapján  $r = R \cos\varphi$ , a testnek a Föld forgástengelyétől mért távolsága.

Figyelembe véve, hogy a fenti egyenletben a második tag elhanyagolható a többi mellett, azt kapjuk, hogy

$$N = G_{90^\circ} \sqrt{1 - 2 \left( \frac{R\Omega^2}{g_{90^\circ}} \right) \cos^2 \varphi}.$$

Mivel  $\frac{R\Omega^2}{g_{90^\circ}} \cong 0,0034 \ll 1$  ezért az  $(1+x)^\alpha \cong 1 + \alpha x$ ,  $x \ll 1$  közelítést használva ez a

$$N(\varphi) = G(\varphi) \cong G_{90^\circ} \left( 1 - \frac{R\omega^2}{g_{90^\circ}} \cos^2 \varphi \right)$$

alakot ölti. Ez egyben megadja az  $m$  tömegű, a Földhöz képest nyugvó test súlyának változását a földrajzi szélesség függvényében. A nehézségi gyorsulás ennek alapján a

$$g(\varphi) \cong g_{90^\circ} - r\omega^2 \cos^2 \varphi = (983,2 - 3,4 \cos^2 \varphi) \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

függvény szerint függ a földrajzi szélességtől.

Pontos mérések szerint a nehézségi gyorsulás a valóságban a

$$g(\varphi) \cong g_{90^\circ} - 5,2 \cos^2 \varphi \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = (983,2 - 5,2 \cos^2 \varphi) \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

függvény szerint változik. Az egyenlítőn a nehézségi gyorsulás értéke  $g_{0^\circ} = 978,0 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ . A

$3,4 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$  faktor helyett adódó  $5,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$  érték a Föld lapult alakjának következménye. A lapultság maga is a Föld forgása miatt jön létre, a centrifugális erő miatt a Föld nem pontosan gömb alakú, egyenlítői sugara ( $R_e = 6378 \text{ km}$ ) kissé nagyobb mint a pólusokhoz tartozó ( $R_p = 6357 \text{ km}$ ). A Föld lapultsága  $\frac{R_e - R_p}{R_e} \cong \frac{1}{300}$  (Egy kb.  $30 \text{ cm}$  sugarú gömb esetén a sugarak különbsége  $1 \text{ mm}$  lenne ilyen lapultság mellett. Ez szemmel nem érzékelhető különbség!)

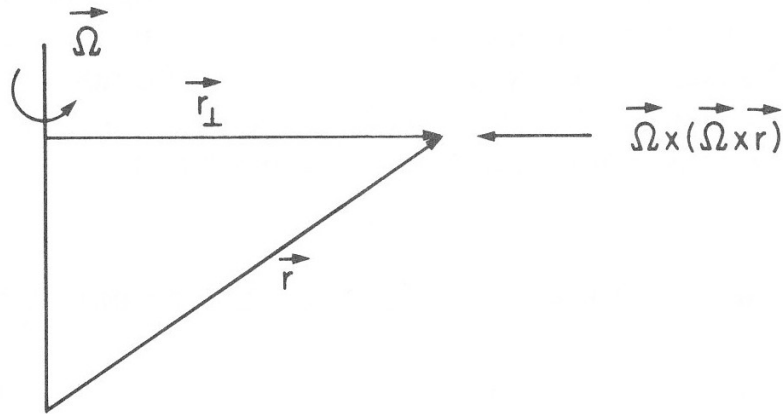
A nehézségi gyorsulás Budapesten mért  $980,8 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ -os értéke pontosan egyezik a Error: Reference source not found összefüggésből számítottal.

Megjegyzések: 1930-ban Stockholmban fogadták el az ún. Cassinis-formulát, ami a tengerszintre vonatkozó nehézségi gyorsulást adja meg a földrajzi szélesség függvényében. A Cassinis-formula szerint:

$$g(\varphi) = 978,049(1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,00000 \sin^2(2\varphi)) \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

A Föld lapultságára és alakjára vonatkozólag rendkívül pontos információk kaphatók a műholdak mozgása kapcsán.

A meteorológiai gyakorlatban – ahogy az előző félévi tananyagban már láttuk – az abszolút nehézségi erő és a centrifugális erő összege a gravitációs erő. A gravitációs erő irányát a geoid alakú Föld felszínének normálvektora jelöli ki.



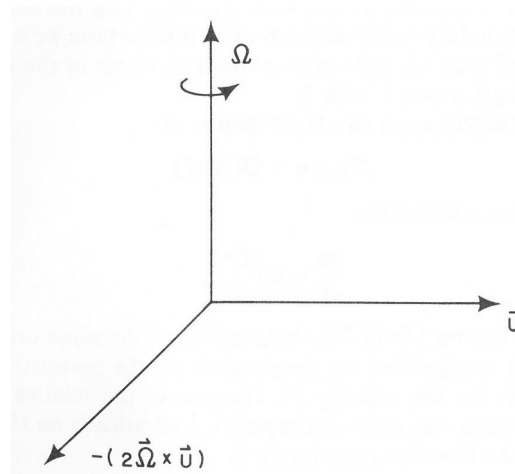
5. ábra. Az  $\Omega \times (\Omega \times r)$  centripetális gyorsulás. J. Pedlosky, 1987: Geophysical Fluid Dynamics. Springer Verlag. Fig. 1.6.1. 18 p.

A centrifugális erő potenciális, hiszen

$$-\Omega \times (\Omega \times r) = -\Omega(\Omega \cdot r) + r(\Omega \cdot \Omega) = \Omega^2 r = \nabla \Phi_{cp} = -\nabla \Phi_{cf},$$

ahol  $r_{\perp}$  az adott tömegpont helyvektorának a földforgás szögsebesség-vektorára merőleges (az Egyenlítő síkjával párhuzamos) vetülete.

A relatív rendszerbeli másik kényszererő az elmozduló légrészre hat. Ez a Coriolis-erő (6. ábra). Alakja:  $F_{Cor} = -2\Omega \times v_r$ .



6. ábra. Kapcsolat  $v$ ,  $\Omega$  és az egységnyi tömegű testre ható Coriolis-erő között ( $F_{Cor} = -2\Omega \times v_r$ ). J. Pedlosky, 1987: Geophysical Fluid Dynamics. Springer Verlag. Fig. 1.6.2. 19 p.

A Coriolis-erő tehát nem végez munkát, merőleges az elmozdulásra. Az északi féltekén az elmozduló légrészt jobbra téríti el, a déli féltekén balra. A Coriolis-erő alakítja a mérsékelt szélességek mozgásrendszereit, a ciklonok és az anticiklonok áramlási képét, illetve az izobárokkal párhuzamosan fújó geosztrofikus szelet.



## IX.2.3.

## Skalárok a forgó rendszerben

A skalárok teljes időbeli deriváltjai megegyeznek az abszolút és a relatív rendszerben. Most ezt a sokszor használt állítást bizonyítjuk be a nyomásváltozás példáján.

Tekintsük a  $\nabla p$  nyomási gradienst, ami a koordináta-rendszer választástól független vektorinvariáns. A lokális változások közötti kapcsolatot a

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_a = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_r - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla p$$

kifejezés adja meg. Ez érthető, ha elképzelünk egy stacionárius (időben állandó,  $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_r = 0$ ) nyomási mezőt a Föld felszínén, a Földdel együtt forgó relatív rendszerben. Itt a nyomási gradiens értéke legyen  $\nabla p$ . Ekkor, az abszolút rendszerből szemlélve a nyomási mező egy adott (rögzített) pontját azt tapasztaljuk, hogy a nyomás változni fog, mégpedig  $-(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla p$  értékkel. Minden pillanatban más és más földrajzi hosszúsági fok fog áthaladni az abszolút rendszer ugyanazon pontján. Az abszolút rendszerben lokális nyomásváltozást tapasztalunk. Az abszolút és a relatív rendszerbeli sebességek közötti kapcsolat és a nyomási gradiens invariáns volta miatt fennáll, hogy

$$\mathbf{v}_a \cdot \nabla p = (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla p.$$

A két egyenlet összevetéséből következik az állítás

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_a + \mathbf{v}_a \cdot \nabla p = \left(\frac{dp}{dt}\right)_a = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_r - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla p + (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_r + \mathbf{v}_r \cdot \nabla p = \left(\frac{dp}{dt}\right)_r$$

## IX.2.4.

## A Navier–Stokes-egyenletek

A hidrodinamikában, így a meteorológiai gyakorlatban is a mozgásegyenletet egységnyi tömegre vonatkoztatva írjuk fel, így a relatív koordináta-rendszerben fellépő erők az egységnyi tömegre ható erőt jelentik, a tehetetlenségi erők helyett pedig a megfelelő gyorsulás-összetevők szerepelnek.

Így a Navier–Stokes-egyenleteket a gyorsulások relatív koordináta-rendszerbe transzformált kifejezésével, valamint a centrifugális potenciál felhasználásával az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt}\right)_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r + \nabla \Phi_{cf} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_a + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_s(\mathbf{v}_r),$$

$$\left( \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r - (\nabla\Phi_{cf} + \nabla\Phi_a) + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_s(\mathbf{v}_r).$$

Emlékeztetünk: az áttérésnél kihasználtuk, hogy ha adott egy vektor, akkor mindegy, hogy azt melyik rendszerből nézzük (ugyanarról a vektorról beszélünk); csupán a reprezentációja változik, vagyis

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{v}_a) = (\mathbf{F}_s(\mathbf{v}_a))_a = (\mathbf{F}_s(\mathbf{v}_a))_r = (\mathbf{F}_s(\mathbf{v}_r))_r = \mathbf{F}_s(\mathbf{v}_r).$$

Megjegyezzük, hogy  $\mathbf{v}_a \neq \mathbf{v}_r$ , de ez nem is probléma, hiszen az  $\boldsymbol{\Omega}$  szögsebességgel történő forgómozgás nem befolyásolja a molekuláris viszkozitási erőt. Tehát, a viszkozitási és a nyomási gradiens erő független a koordináta-rendszer (abszolút, vagy relatív) választásától.

## IX.2.5.

### A hidro-termodinamikai egyenletrendszer forgó koordináta-rendszerben

A Navier-Stokes egyenletek levezetésével lehetővé vált a teljes hidro-termodinamikai egyenletrendszer felírása Descartes-féle derékszögű forgó koordináta-rendszerben. E koordináta-rendszer jól használható a mikroskáláktól a néhány ezer km-es szinoptikus skáláig, ahol a Föld görbülete még elhanyagolható a számításokban. Megjegyezzük, hogy a hidro-termodinamikai egyenletrendszer általános alakját szférikus koordináta-rendszerben legcélszerűbb felírni. A korszerű, nem hidrosztatikus mezoskálájú modellek már szintén a szférikus rendszerben készültek. Itt a vertikális gyorsulások mellett a metrikus tagok sem elhanyagolhatók. Ezzel a későbbiekben még részletesen foglalkozunk. Ekkor végezzük majd el az egyenletrendszer nagyságrendi analízisét is. Most az Euler- és a Lagrange-féle szemléletmód bemutatására törekszünk. Erre pedig kiválóan alkalmas a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer. Mivel mindkét szemléletmódban a relatív (a Földdel együtt forgó) rendszerben dolgozunk, ezért nem írjuk ki a továbbiakban az  $(\ )_r$  alsó indexet.

### IX.2.5.1 Az egyenletek Euler-szemléletmódban

A három mozgásegyenlet alakja az Euler-szemléletmódban:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + (F_{Cor})_x + \frac{1}{\rho} F_{sx},$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + (F_{Cor})_y + \frac{1}{\rho} F_{sy},$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + (F_{Cor})_z + \frac{1}{\rho} F_{sz},$$

A termodinamikai egyenlet:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{T} \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt} .$$

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} .$$

A vízgőzre vonatkozó kontinuitási egyenlet:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} M .$$

Az állapotegyenlet:

$$p\alpha = \frac{P}{\rho} = RT .$$

A képletekben  $\frac{dQ}{dt}$  a tömegegységnyi légréz időegység alatti hőfelvétele vagy hőleadása,  $M$  a vízgőz mennyiségének növekedési sebessége a párolgás és a szublimáció miatt,  $R$  a levegő specifikus gázállandója,  $\rho$  a sűrűsége,  $c_p$  az állandó nyomáson vett fajhője.

### IX.2.5.2 Az egyenletek Lagrange-szemléletmódban

Mielőtt felírnánk a Lagrange-rendszerben a hidro-termodinamikai egyenletrendszer, elevenítsük fel a Lagrange- és az Euler-rendszer közötti kapcsolatról tanultakat!

A Lagrange-féle koordináta-rendszer független változóit a  $t=t_0$  időpontbeli Descartes-rendszer helyvektoraival azonosítsuk!

$$a = a(x, y, z, t_0) = x | t_0 ,$$

$$b = b(x, y, z, t_0) = y | t_0 ,$$

$$c = c(x, y, z, t_0) = z | t_0 .$$

Felírhatjuk az egyes Lagrange-koordináták teljes időbeli megváltozását. A térbeli és időbeli változásokat az Euler-féle rendszerben adjuk meg. Tudjuk: ha egy légréz mozgását vizsgáljuk, akkor a lagrange-i koordinátái nem változnak – teljes időbeli deriváltjuk nulla. Természetesen a tér egy adott pontján mindig más és más részecske halad át, így a lagrange-i koordináták parciális idő szerinti deriváltjai természetesen nem nullák.

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial a}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} u + \frac{\partial a}{\partial y} v + \frac{\partial a}{\partial z} w = 0 .$$

Hasonlóképpen a másik két koordinátára:

$$0 = \frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} u + \frac{\partial b}{\partial y} v + \frac{\partial b}{\partial z} w ,$$

$$0 = \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} u + \frac{\partial c}{\partial y} v + \frac{\partial c}{\partial z} w .$$

Tudjuk továbbá, hogy a Lagrange- és az Euler-rendszerbeli sebességek megegyeznek.

$$\mathbf{v}_E(x, y, z, t) = \mathbf{v}_L(a, b, c, t) .$$

A koordináta-rendszer választása miatt

$$u_L = u_E \equiv u, \quad v_L = v_E \equiv v, \quad w_L = w_E \equiv w .$$

A két rendszerbeli skalárok és vektorok, illetve ezek teljes időbeli deriváltjai is megegyeznek. Tekintsük például a Lagrange-rendszerben a sebesség  $x$  irányú komponensét:  $u_L(a, b, c, t)$ . Ennek teljes időbeli megváltozása:

$$\left( \frac{du_L}{dt} \right)_L = \frac{\partial u_L}{\partial t} + \frac{\partial u_L}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial u_L}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial u_L}{\partial c} \frac{dc}{dt} = \left( \frac{\partial u_L}{\partial t} \right)_L .$$

Korábban már beláttuk, hogy

$$\left( \frac{du_E}{dt} \right)_E = \left( \frac{\partial u_L}{\partial t} \right)_L ,$$

tehát

$$\left( \frac{du_E}{dt} \right)_E = \left( \frac{du_L}{dt} \right)_L .$$

A mozgásegyenletek Lagrange-rendszerbeli felírásához tudnunk kell a nyomási gradiens két rendszer közötti transzformációját. Írjuk fel a Lagrange-rendszerbeli nyomási gradienst az Euler-rendszerbeli gradiens segítségével. A nyomási gradiens természetesen invariáns – reprezentációja azonban eltér a két rendszerben.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial b} ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \vec{a}} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \vec{a}} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \vec{a}}.$$

Az áttérés lényege, hogy az Euler-rendszerbeli nyomási gradiensek átírásakor az euleri mozgásegyenleteket úgy rendezzük, hogy az egyenletek bal oldalán a nyomási gradiens erő szerepeljen. A jobboldali tagokat pedig kifejezzük a lagrange-i rendszerben.

$$\left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_E = \left( \frac{du}{dt} - (F_{Cor})_x - \frac{1}{\rho} F_{sx} \right)_E = \left( \frac{\partial u_L}{\partial t} \right)_L - \left( (F_{Cor})_x + \frac{1}{\rho} F_{sx} \right)_L = \left( \frac{\partial u_L}{\partial t} \right)_L - (F_x)_L,$$

$$\left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right)_E = \left( \frac{dv}{dt} - (F_{Cor})_y - \frac{1}{\rho} F_{sy} \right)_E = \left( \frac{\partial v_L}{\partial t} \right)_L - \left( (F_{Cor})_y + \frac{1}{\rho} F_{sy} \right)_L = \left( \frac{\partial v_L}{\partial t} \right)_L - (F_y)_L,$$

$$\left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right)_E = \left( \frac{dw}{dt} - (F_{Cor})_z + g - \frac{1}{\rho} F_{sz} \right)_E = \left( \frac{\partial w_L}{\partial t} \right)_L - \left( (F_{Cor})_z - g + \frac{1}{\rho} F_{sz} \right)_L = \left( \frac{\partial w_L}{\partial t} \right)_L - (F_z)_L$$

A Coriolis-erő és a nehézségi erő komponenseinek átírása nem okoz problémát, hiszen itt csak állandók, illetve az Euler-rendszerbeli sebességek szerepelnek. A molekuláris viszkozitási erő egyes komponenseinek átírásában pedig az Euler- és a Lagrange-rendszerbeli deriváltak közötti kapcsolatot kell felhasználni, ahogy azt a kontinuitási egyenlet kapcsán már megmutattuk. Itt kihasználjuk a divergencia és a Laplace-operátor invariáns tulajdonságát.

Végezetül az így kapott kifejezéseket behelyettesítjük a Lagrange-változók szerinti nyomásváltozás  $\left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial a}, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial b}, \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial c} \right)$  fenti kifejezéseibe. Átrendezés után kapjuk a mozgásegyenleteket:

$$\left( \frac{\partial u_L}{\partial t} \right)_L \frac{\partial x}{\partial a} + \left( \frac{\partial v_L}{\partial t} \right)_L \frac{\partial y}{\partial a} + \left( \frac{\partial w_L}{\partial t} \right)_L \frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial a} + (F_x)_L \frac{\partial x}{\partial a} + (F_y)_L \frac{\partial y}{\partial a} + (F_z)_L \frac{\partial z}{\partial a},$$

$$\left( \frac{\partial u_L}{\partial t} \right)_L \frac{\partial x}{\partial b} + \left( \frac{\partial v_L}{\partial t} \right)_L \frac{\partial y}{\partial b} + \left( \frac{\partial w_L}{\partial t} \right)_L \frac{\partial z}{\partial b} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial b} + (F_x)_L \frac{\partial x}{\partial b} + (F_y)_L \frac{\partial y}{\partial b} + (F_z)_L \frac{\partial z}{\partial b},$$

$$\left( \frac{\partial u_L}{\partial t} \right)_L \frac{\partial x}{\partial c} + \left( \frac{\partial v_L}{\partial t} \right)_L \frac{\partial y}{\partial c} + \left( \frac{\partial w_L}{\partial t} \right)_L \frac{\partial z}{\partial c} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial c} + (F_x)_L \frac{\partial x}{\partial c} + (F_y)_L \frac{\partial y}{\partial c} + (F_z)_L \frac{\partial z}{\partial c}.$$

A fenti három egyenletből már kifejezhető a Lagrange-féle sebességkomponensek lokális változása. Így arra a kérdésre kapunk választ, hogy egy individuális légréteg sebessége hogyan változik az időben (ill. a trajektória mentén).

A termodinamikai egyenlet:

$$\left( \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial a} \right)_L = \frac{\Theta}{T} \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial a} \right)_L.$$

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\rho(a,b,c,t_0)}{\rho(a,b,c,t)} = \frac{\alpha(a,b,c,t)}{\alpha(a,b,c,t_0)} = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \\ \frac{\partial t}{\partial a} & \frac{\partial t}{\partial b} & \frac{\partial t}{\partial c} \end{array} \right| .$$

A vízgőzre vonatkozó kontinuitási egyenlet:

$$\left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)_L = \frac{1}{\rho} M_L .$$

Az állapotegyenlet:

$$p\alpha = \frac{p}{\rho} = RT .$$

Az  $( )_L$  alsó index a Lagrange-rendszerre utal.