

VIII. A légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer

VIII.1. A légkörben ható erők.....	1
VIII.1.1. A nyomási gradiens erő.....	2
VIII.1.2. Az abszolút gravitációs erő.....	3
VIII.1.3. A molekuláris súrlódási erő.....	5
VIII.1.4. A teljes feszültségi tenzor.....	8
VIII.2. A Navier-Stokes egyenletek.....	14
VIII.3. A kontinuitási egyenlet.....	16
VIII.3.1. A kontinuitási egyenlet az Euler-féle szemléletmódban.....	16
VIII.3.2. A kontinuitási egyenlet Lagrange-féle szemléletmódban.....	19
VIII.4. A nedvesség- és nyomanyagszállítási egyenlet.....	20
VIII.4.1. A nedvességszállítási egyenlet.....	20
VIII.4.2. A nyomanyagszállítási egyenlet.....	22
VIII.5. A termodinamikai egyenlet, a fázisátalakulások parametrizálása.....	23

A hidro-termodinamikai egyenletrendszert a légkörben végbemenő folyamatokat meghatározó fizikai törvények matematikai formulái alkotják. Ezek: a mozgásegyenletek, a tömegmegmaradás elvét kifejező kontinuitási egyenlet, a termodinamikai egyenlet és az állapotegyenlet. A légkör állapotát ezen egyenletrendszer megoldásával jelezhetjük előre. Ebben a fejezetben bemutatjuk a hidro-termodinamikai egyenletrendszer egyenleteit.

Amikor a légkörben lejátszódó folyamatokat vizsgáljuk, az első feladat a koordináta-rendszer, még általánosabban a szemléletmód megválasztása. Az előző fejezetben tárgyaltuk az Euler- és Lagrange-féle szemléletmódot. Emlékeztetőül, az Euler-féle szemléletmódban nem magát a levegőrészt, hanem a levegővel töltött mozdulatlan, vagy mozgó teret vizsgáljuk. A levegő állapotát, mozgását leíró skalár- és vektormezőket tanulmányozzuk. A Lagrange-féle szemléletmódban elemi légrésekből építjük fel a teret. Az egyes légrésekben bekövetkező változásokat tanulmányozzuk, pl. megváltozik a légréész helye, hőmérséklete, nyomása, stb. Ebben a fejezetben az egyszerűség kedvéért elsősorban az Euler-féle szemléletben dolgozunk. A kontinuitási egyenlet esetében a Lagrange-féle alakkkal is részletesebben foglalkozunk.

VIII.1. A légkörben ható erők

Elsőként nyugvó koordináta-rendszerben (Newton I. axiómája szerinti inercia-rendszerben) írjuk fel a légköri mozgásegyenletet tömegegységnyi levegőre. A mozgásegyenletek felírásához ismernünk kell a légkörben ható erőket. A tömegegységnyi levegőre ható erőket két csoportra osztjuk:

- (i) olyanokra amelyek függetlenek a Föld forgásától és
- (ii) olyan tehetetlenségi erőkre, amelyek a Földhöz kötött koordináta-rendszer

választásából adódnak (ezekkel itt nem foglalkozunk).

Az első csoportba tartozik:

- a Föld tömegvonzásából származó erő,
- a nyomási mező inhomogenitása miatt fellépő nyomási gradiens erő, és
- a reális folyadékok mozgását kísérő molekuláris súrlódási erő.

A dinamikus meteorológiában nem foglalkozunk a Nap, illetve a Hold tömegvonzásából származó, a légköri árapály jelenséget kormányzó erőkkel. Ezek elhanyagolható szerepet játszanak a troposzféra és a sztratoszféra folyamataiban.

A tehetetlenségi erők közül három fajtával kell majd foglalkozunk (ld. a köv. fejezeteket):

- a Föld forgásából származó centrifugális erővel, ami minden tömegpontra hat,
- a forgó Földön elmozduló légrézre ható Coriolis-erővel, és
- a koordináta-rendszer választásától függő további tehetetlenségi erőkkel, mint például a szférikus (gömbi) rendszerben megjelenő metrikus gyorsulások.

Másképp is osztályozhatjuk a légköri erőket. Beszélhetünk térfogati és felületi erőkről. Térfogati erő az abszolút nehézségi erő és a tehetetlenségi erők, míg felületi erő a nyomási gradiens erő és a molekuláris viszkozitási erő.

Vegyük sorra azokat az erőket, amelyek függetlenek a Föld forgásától!

VIII.1.1. A nyomási gradiens erő

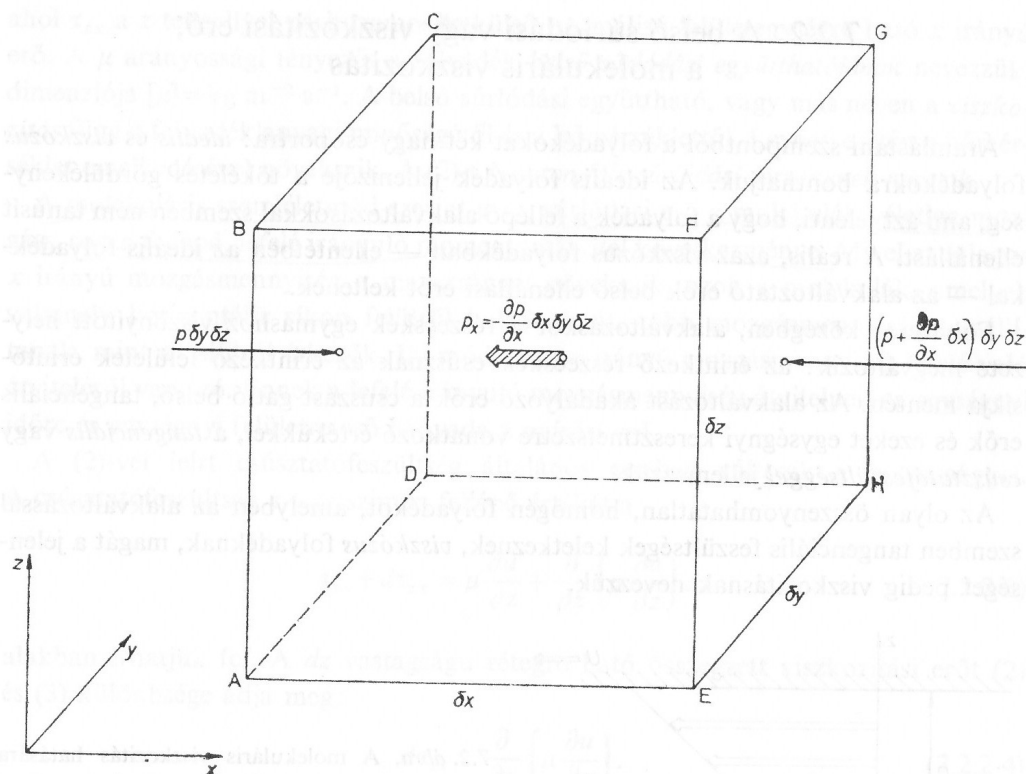
A nyomási gradiens erő a súrlódási erőhöz hasonlóan felületi erő. Tekintsünk egy ΔV térfogatelemet. Az inhomogén nyomáseloszlás következtében a térfogatelem különböző oldallapjaira más és más nyomóerő hat. Ezek összege adja a térfogategységre, illetve a sűrűséggel normálva a tömegegységre vonatkozó nyomási gradiens erőt.

A derékszögű elemi térfogatrészre Z irányban ható nyomási gradiens erő:

$$p\Delta x\Delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y = -\frac{\partial p}{\partial z}\Delta V.$$

Ez alapján már könnyen felírhatók a tömegegységre vonatkozó nyomási gradiens erő ($\mathbf{F}_p(\mathbf{r}, t)$) egyes komponensei is:

$$\mathbf{F}_p(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$



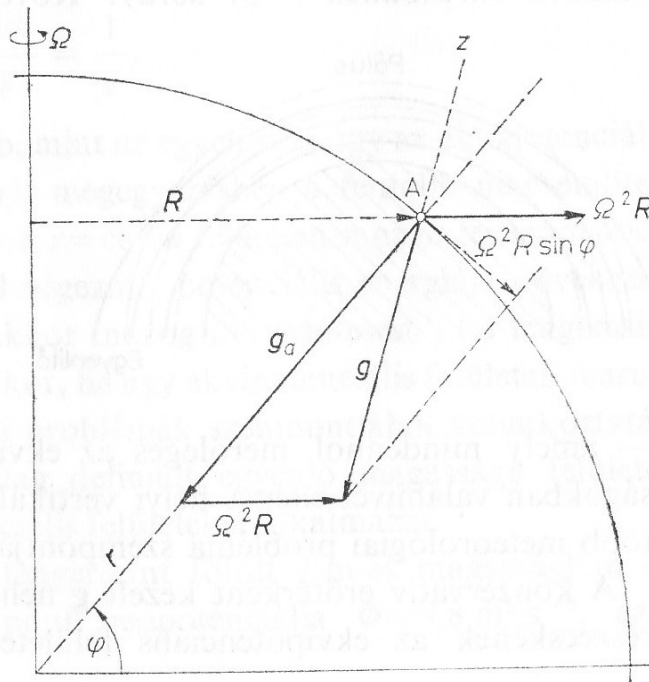
1. ábra. A nyomási gradiens erő szemléletes képe. Rákóczi F., 1981: A dinamikus meteorológia alapjai. Tankönyvkiadó, Budapest, 7.1. ábra alapján, 203. oldal.

VIII.1.2. Az abszolút gravitációs erő

A Newton-féle általános tömegvonzási törvény értelmében a Föld középpontjától \mathbf{r} távolságra lévő egységnyi tömegű légrézre $\mathbf{F}_{g_a}(\mathbf{r})$ (abszolút) gravitációs erő hat. Ennek alakja:

$$\mathbf{F}_{g_a}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{m} \frac{\gamma M_F m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{g}_a,$$

ahol $M_F = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ a Föld, m az egységnyi légréz tömege, $\gamma = 6,668 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ a gravitációs állandó. A dinamikus meteorológiában általában tömegegységnyi levegőről beszélünk. Ezt nem jelezzük külön (pl. az abszolút gravitációs erő felírásakor). Így érthető, hogy sokszor erőről beszélünk, s a gyorsulás dimenzióját használjuk.



2. ábra. Az abszolút gravitációs erő és a nehézségi (vagy gravitációs) erő közötti kapcsolat. Rákóczi F., 1981: A dinamikus meteorológia alapjai. Tankönyvkiadó, Budapest, 4.2. ábra alapján, 133.

A g_a abszolút gravitációs gyorsulás nagysága változik a magassággal. Értéke a Föld felszínén a földrajzi szélesség, azaz a Föld tömegközéppontjától vett távolság függvénye ($g_{a0}(\varphi) = g_a(r_0, \varphi)$). Vizsgáljuk az abszolút gravitációs gyorsulás magasság szerinti megváltozását! A Föld középpontjától vett távolság legyen $r = r_0 + z$, ahol r_0 az adott szélességi körön a geoid alakú Föld sugara, míg z a felszín feletti magasság.

$$g_a(r, \varphi) = \frac{g_{a0}(\varphi)}{\left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^2}.$$

Mivel $r_0 \gg z$, az utóbbi egyenletet $z=0$ körül Taylor-sorba fejtvé, s kihasználva a másodrendű tagok kicsi voltát kapjuk, hogy:

$$g_a(z, \varphi) = g_{a0}(\varphi) \left(1 - \frac{2z}{r_0}\right),$$

$$g_a(z, \varphi) = g_{a0}(\varphi) (1 - 3,14 \cdot 10^{-7} z).$$

Az abszolút gravitációs gyorsulás 1%-os csökkenéséhez kb. 35 km-es magasságváltozás szükséges.

VIII.1.3. A molekuláris súrlódási erő

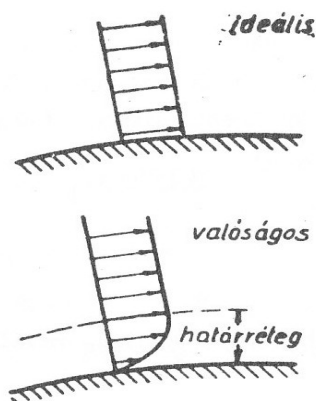
A folyadékok és gázok alapvető tulajdonsága, hogy nem mutatható ki bennük nyugvó súrlódás, vagyis végtelen lassú elmozduláshoz végtelen kis erő szükséges. A légkörben a molekuláris súrlódás (molekuláris viszkozitás) a felszínhez közeli néhány mm-es rétegben, az ún. viszkózus alrétegben jelentős. Ez a vékony réteg lehet egy nagy hó- vagy vízfelszín felett kialakuló határfelületi áramlás, de akár egy nagy levél körüli áramlási tér. Egy mezőgazdasági kultúra (pl. gabona- vagy kukoricatábla) vagy egy erdő felett szigorúan véve nem alakul ki ilyen jól elkülönülő viszkózus alréteg. Ugyanez a helyzet a városi területek (általánosabban: beépített területek, települések) felett is. Itt a tereptárgyak felületét követve írhatjuk le a molekuláris viszkozitási alréteget, tanulmányozhatjuk a tereptárgyak, ill. a növényzet és a légkör közötti kölcsönhatásokat. Például egy nagyvárost átszelő folyó felett, vagy az épületek felületén, vagy akár az aszfaltút felett külön-külön megvan a viszkózus alréteg. Természetesen a felszín-légkör kölcsönhatások modellezésében a viszkózus alréteg integrált hatását parametrizáljuk.

A molekuláris viszkozitás ott lényeges, ahol a *Reynolds-szám* (Re), vagyis a tehetetlenségi erő és a molekuláris viszkozitási erő hányadosa kicsi, 10^3 nagyságrendű, vagy az alatti. A Reynold-szám mint hasonlósági kritérium alakja:

$$Re = \frac{ul}{\nu},$$

ahol u a karakterisztikus sebesség, l a karakterisztikus méret, itt a felszín feletti magasság, míg ν a kinematikai viszkozitási tényező, vagy más elnevezéssel a molekuláris diffúziós együttható (értéke levegőre $\sim 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$).

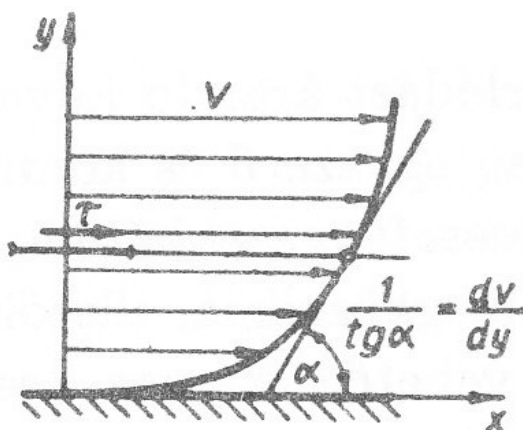
Ideális (viszkózitásmentes) közegben a határfelület menti áramlás mindig párhuzamos a felülettel (2. ábra). Az áramló levegő nem ideális. A molekuláris viszkozitás hatására a sebesség a határfelületen nullává válik. Az a réteg, ahol a sebesség változását a határfelület tulajdonságai befolyásolják, a viszkózus alréteg (általánosabban fogalmazva a határréteg). Ha a turbulens mozgásokat elhanyagoljuk, akkor a viszkózus alréteg felett az áramlás súrlódásmentesnek tekinthető. A molekuláris viszkozitást Gruber József és Blahó Miklós: Folyadékok mechanikája című klasszikus műszaki egyetemi jegyzete alapján ismertetjük.



3. ábra. Az ideális és a valóságos folyadék áramlása végtelen határfelület mentén. Gruber J., Blahó M., 1973: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó. 117. ábra. 161. oldal.

A molekuláris viszkozitás okozta folyadéksúrlódás elnevezése Newtontól származik. Szerinte réteges áramlásban, ahol az áramvonalak párhuzamos egyenesek, és a sebesség az áramvonalakra merőlegesen változik (a határfelülettől távolodva növekszik), csúsztató feszültségek keletkeznek a határfelülettel párhuzamos síkokban (3. ábra). A τ csúsztató feszültség az egységnyi felületre (a felület síkjában) ható erőt adja meg, dimenziója: $[\text{N m}^{-2}]$. A csúsztató feszültség arányos a sebesség áramvonalakra (a határfelületre) merőleges differenciálhányadosával:

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$



4. ábra. A csúsztató feszültség számítása a sebességprofil ismeretében. Az ábrán az x irányú, z tengelyre merőleges csúsztató feszültség látható olyan áramlásban, ahol a sebesség csak a z irányban változik. Gruber J., Blahó M., 1973: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó. 118. ábra. 162. oldal.

A súrlódásból eredő feszültségek – ahogy már korábban is említettük – a megfelelő deformációk sebességével arányosak. Viszkózus közegben a légrézecskek (illetve folyadékelemek) alakváltozást szenvednek, amiért a belső ellenállási erő, az ún. molekuláris viszkozitási erő a felelős. Az áramlás fenntartásához állandó energia-bevezetésre van szükség. Másképp fogalmazva: viszkózus közegben az áramlás kinetikus energiájának egy része folyamatosan hővé alakul a deformáció sebességével arányos feszültségek által végzett ún. deformációs munka következtében. Ez a molekuláris energiadisszipáció.

Az adott anyagra (folyadék, gáz) jellemző μ arányossági tényező az ún. viszkozitási tényező. Dimenziója:

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{\left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]} = [(\text{Nm}^{-2})(\text{m})(\text{m}^{-1}\text{s})] = [\text{Nsm}^{-2}]$$

A meteorológiában tömegegységnyi levegővel dolgozunk. Ekkor a viszkozitási tényező sűrűséggel osztott értékét, az ún. kinematikai viszkozitási tényezőt használjuk.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

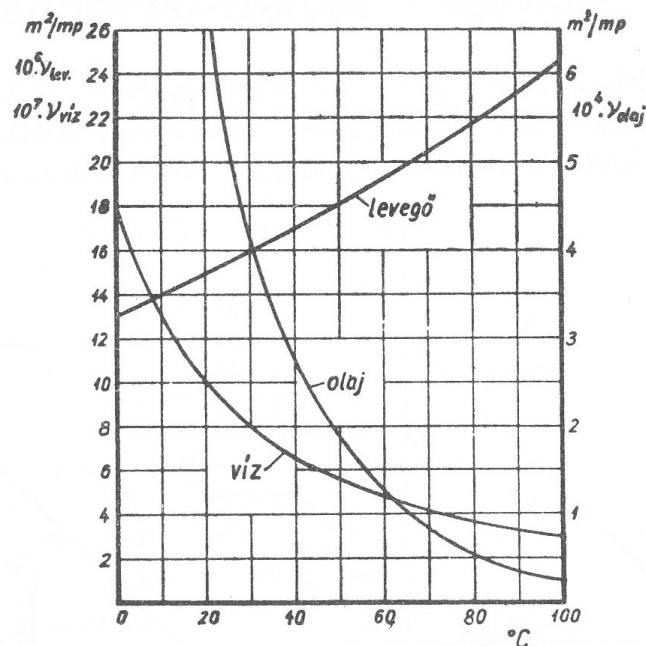
Dimenziója:

$$[\nu] = [(Nsm^{-2})(m^3kg^{-1})] = [m^2s^{-1}].$$

A kinematikai viszkozitási tényező függ a hőmérséklettől – gázokban kismértékben a nyomástól is. A levegőre és a vízre vonatkozó értékeket az I. táblázat, illetve a 4. ábra szemlélteti. A kinematikai viszkozitási tényező nagyságrendje levegőre $\nu_{\text{levegő}} = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, vízre: $\nu_{\text{víz}} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

	Víz (4 °C)	Levegő (760Hgmm, 0 °C)
Sűrűség	$\rho \text{ kg/m}^3$ 10 ³	1,29
Nyúlóssági tényező	$\mu \text{ Ns/m}^2$ 130 · 10 ⁻⁵	1,8 · 10 ⁻⁵
Kinematikai nyúlóssági tényező	$\nu \text{ m}^2/\text{s}$ 1,3 · 10 ⁻⁶	14,4 · 10 ⁻⁶

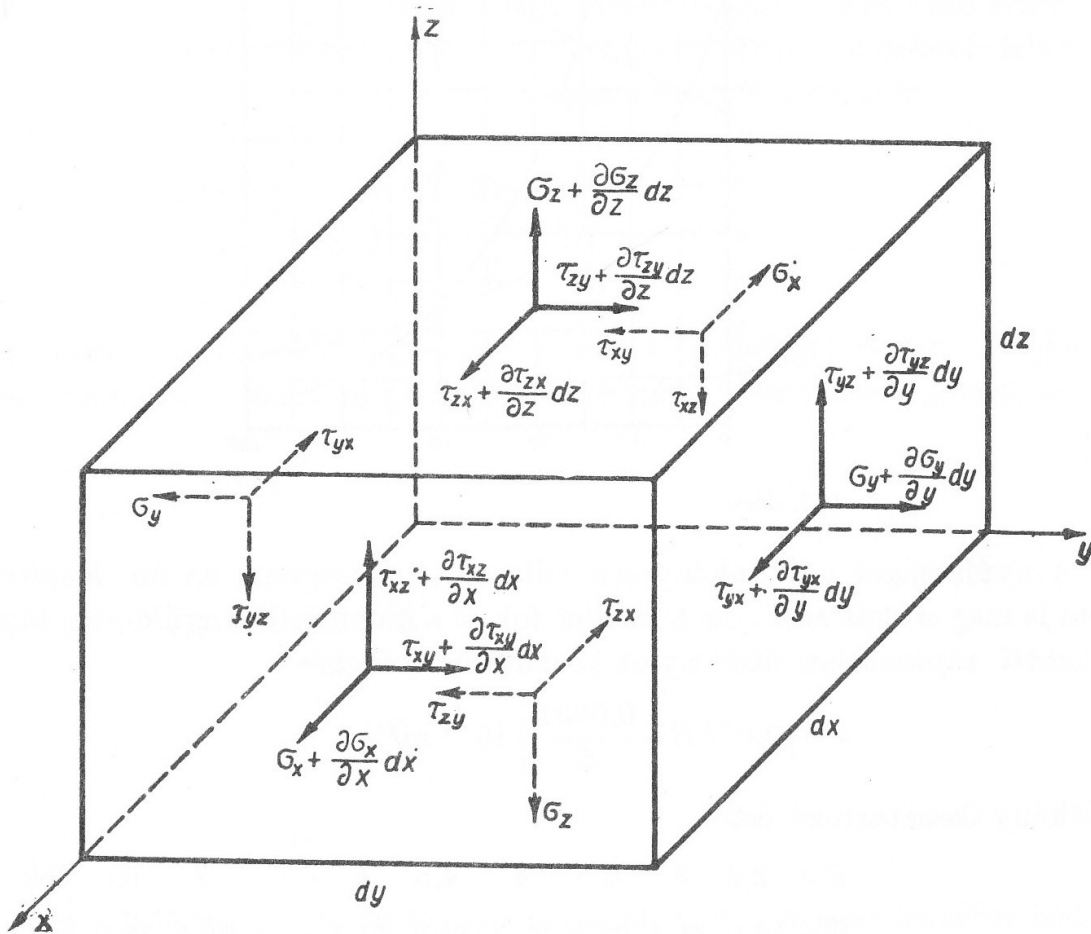
I. táblázat. A viszkozitási és a kinematikai viszkozitási tényező vízre és levegőre. Gruber J., Blahó M., 1973: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó. 163. oldal.



5. ábra. A viszkozitási és a kinematikai viszkozitási tényező hőmérsékletfüggése vízre, olajra és levegőre. Gruber J., Blahó M., 1973: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó. 119. ábra. 163. oldal.

VIII.1.4. A teljes feszültségi tenzor

Az áramló közeg egy kiválasztott felületelemére – a molekuláris viszkozitásból és a nyomási mező szerkezetéből eredően – húzó és csúsztató feszültségek hatnak. Ezeket írjuk le a „teljes” feszültségi tenzorral. Tekintsünk az áramlási térben egy elemi kockát! Írjuk fel az egyes lapokkal párhuzamos τ csúsztató feszültséget és a lapokra merőleges irányban ható σ húzó feszültséget! A 4. ábra a meteorológiai gyakorlatban alkalmazott jelölésmód szerint mutatja be a feszültségeket. (Pl. τ_{zx} megadja a Z tengelyre merőleges X irányú csúsztató feszültséget.)



6. ábra. Húzó- és csúsztató feszültségek egy elemi kocka lapjain. Gruber J., Blahó M., 1973: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó. 120. ábra alapján. 164. oldal.

Az elemi kocka felületén ható nyomási gradiens erő és molekuláris viszkozitási erő egyes komponenseit a

$$\oint_{\Delta F} \mathbf{P} d\mathbf{F} = \int_{\Delta V} \nabla \mathbf{j} v \mathbf{P} dV$$

kifejezésből számítjuk. A felírásból következik, hogy $\text{Div } \mathbf{P}$ egy vektor. A teljes feszültségi tenzor alakja:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

A teljes feszültségi tenzor szimmetrikus. Más alakú nem is lehetne. A kocka középpontjára vonatkozó forgatónyomaték az élméret harmadik hatványával, a tehetetlenségi nyomaték az élméret ötödik hatványával arányos. Csak szimmetrikus feszültségi tenzor biztosíthatja azt a feltételt, hogy ne legyen az elemi kockának szöggyorsulása, vagyis biztosítja, hogy a forgatónyomatékok összege nulla legyen. (A forgatónyomaték a tehetetlenségi nyomaték és a szöggyorsulás szorzata.) A feszültségi tenzor szimmetrikus, így $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$, vagyis

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \frac{\tau_{xy}}{\partial y} & \frac{\tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\tau_{yx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} & \frac{\tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\tau_{zx}}{\partial x} & \frac{\tau_{zy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \frac{\tau_{yx}}{\partial y} & \frac{\tau_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\tau_{xy}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} & \frac{\tau_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\tau_{xz}}{\partial x} & \frac{\tau_{yz}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix},$$

továbbá

$$\text{Div } \mathbf{P} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P} \right) \mathbf{E} = \text{Div } \mathbf{P}^* = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{P}^* \right) \mathbf{E}.$$

A következő lépésként írjuk fel az x irányban ható felületi erőt (nyomási gradiens erő + molekuláris viszkozitási erő), ami a ΔV térfogatú és Δm tömegű légrézre (ill. folyadék-elemre) vonatkozik. A feszültségi tenzor egyes komponenseinek definíciója, illetve az alkalmazott jelölések alapján a

$$\oint_{\Delta F} \mathbf{P} \, d\mathbf{F} = \int_{\Delta V} \text{Div } \mathbf{P} \, dV = \int_{\Delta V} \text{Div } \mathbf{P}^* \, dV$$

egyenlőség bal oldala szerint járunk el az egyes irányokban ható felületi erők felírásakor:

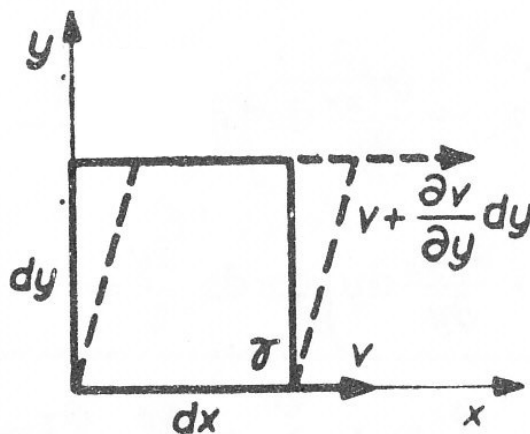
$$\begin{aligned} \int_{\Delta V} \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{i} \, dV &= \int_{\Delta V} (\text{Div } \mathbf{P})_x \, dV = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + F_{sx} \right) \Delta V = \\ &= \left[\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_{xx} dy dz \right] + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz \right] + \\ &+ \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy \right] = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

ahol F_{sx} a molekuláris viszkozitási erő x komponense. (A szögletes zárójelben levő különbségek az egymással szemben levő felületek eltérő irányítottsága miatt vannak.) A molekuláris viszkozitási erő és a nyomási gradiens erő (felületi erők) másik két komponense:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{j} dV = \int_{\Delta V} (\text{Div } \mathbf{P})_y dV = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + F_{sy} \right) \Delta V = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{k} dV = \int_{\Delta V} (\text{Div } \mathbf{P})_z dV = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + F_{sz} \right) \Delta V = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Nézzük meg röviden a teljes feszültségi tenzor elemeit! A csúsztató feszültségek arányosak az alakváltozással, vagyis a szögdeformációval. Az (x, y) síkbeli szögdeformációt a 7. ábra szemlélteti.



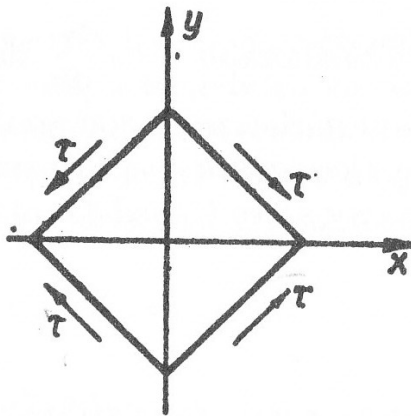
7. ábra. A szögdeformáció szemléltetése az (x, y) síkban. a.) a sebességmező csak y irányban változik. b.) a sebességmező x és y irányban is változik. Gruber J., Blahó M., 1973: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó. 121. ábra alapján, 166. oldal.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \gamma_{12} = \mu \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} - \frac{\partial y_2}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

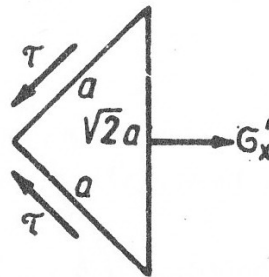
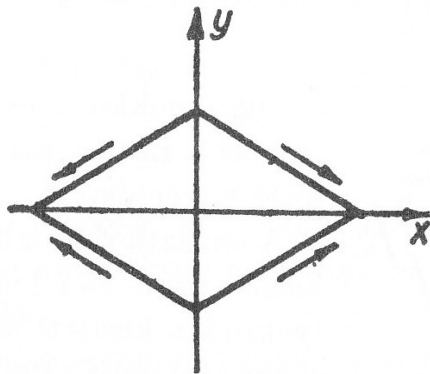
Hasonlóan,

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Következő lépésként nézzük meg a viszkozitásból származó csúsztató és húzó feszültségek közötti kapcsolatot! Tekintsük a 8. ábra szerinti légrészt!



Az ábra szerinti négyzet-alapú elemi hasábot most képzeljük az y tengelyre illeszkedő és az xy síkra merőleges metsző síkkal, vagyis a függőleges átlósíkkal két félre választva. A két rész a valóságban nem távolodik el egymástól, tehát a metszősíkon az egyensúly helyreállítása miatt húzófeszültséget kell feltételeznünk.



8. ábra A csúsztató és húzó feszültségek közötti kapcsolat. Gruber J., Blahó M., 1973: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó. 123. és 124. ábra. 168. oldal.

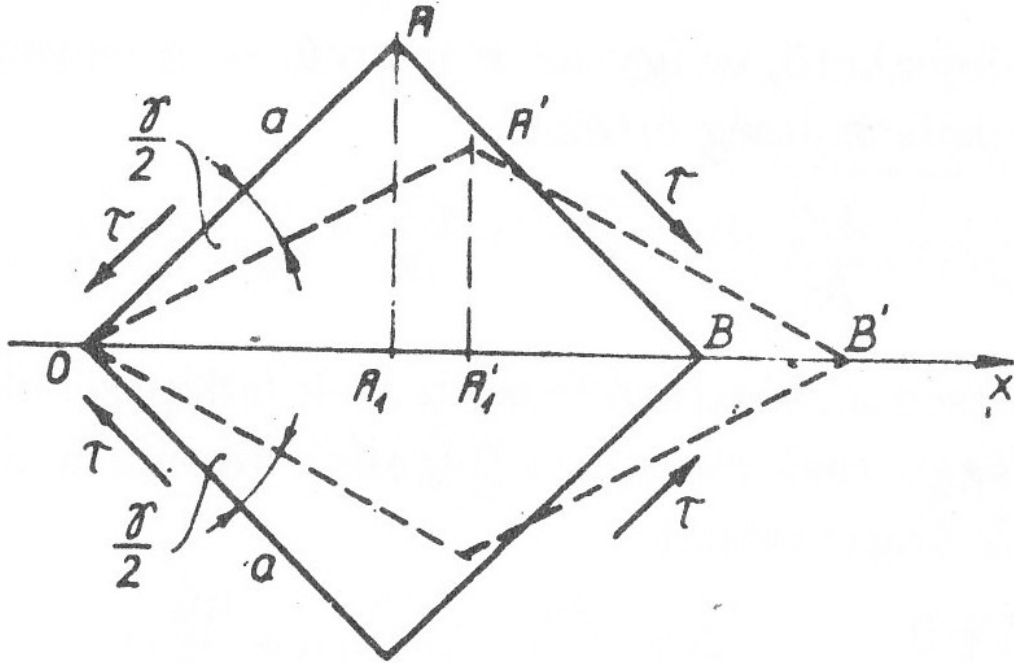
Tekintsünk egy kockát! A megfelelő irányú – nem egymásra merőleges, egymással 45° -os szöget bezáró – húzó és a csúsztató feszültségek megegyeznek, hiszen

$$\sigma' = \frac{\sqrt{2}\tau}{\sqrt{2}} = \tau .$$

A σ' húzó feszültség 2-szor akkora felület mentén hat, mint a nyíró τ feszültség. Hogyan adható meg a relatív megnyúlás (ε), azaz a 8. ábra szerinti

$$\varepsilon = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}}$$

hányados?



9. ábra. Egy négyzet deformációja a húzó és csúsztató feszültségek hatására. A relatív megnyúlás. Gruber J., Blahó M., 1973: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó. 123. és 125. ábra. 169. oldal.

A 9. ábra jelölései alapján

$$\overline{OB} = \sqrt{2}a,$$

valamint

$$\overline{BB'} = 2\overline{A_1A'_1}.$$

Mivel az a oldal elfordulását megadó $\frac{\gamma}{2}$ szög kicsi, ezért

$$\overline{AA'} \approx a\frac{\gamma}{2},$$

továbbá

$$\overline{A_1A'_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AA'} \Rightarrow \overline{BB'} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{\gamma}{2} = a\gamma\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A fentiek alapján a relatív megnyúlás

$$\varepsilon = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}} = \frac{a\gamma\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \gamma = 2\varepsilon.$$

Így a 9. ábrának megfelelően a molekuláris viszkozitásból származó x irányú húzó feszültség (vesszős jelölés):

$$\sigma'_{xx} = \sigma' = 2\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x},$$

hiszen $\sigma' = \tau$ és $\tau = \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}$. A másik két koordináta-irányba eső, molekuláris viszkozitásból származó húzó feszültség rendre:

$$\sigma'_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma'_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}.$$

A viszkózus húzó feszültség a csúsztató feszültségek következménye, ami csak viszkózus közegben keletkezhet, így ideális gáz-, illetve folyadékáramlásban $\sigma' = 0$; ekkor a teljes húzó feszültség a nyomási mezőből származik. $\sigma_{xx} = \sigma''_{xx} = -p$. Tehát a reális gázokban és folyadékokban fellépő húzó feszültségek:

$$\sigma_{xx} = \sigma''_{xx} + \sigma'_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = \sigma''_{yy} + \sigma'_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\sigma_{zz} = \sigma''_{zz} + \sigma'_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Megjegyezzük, hogy tiszta (térfogat változás nélküli) alakváltozás esetén, vagyis összenyomhatatlan közeg feltételezésével:

$$\mathbf{D}'_s = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{pmatrix},$$

$$\text{ahol } \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}).$$

A húzó és csúsztató feszültségek általános alakjának ismeretében írjuk fel a tömegegységre ható felületi erőt! A részletes levezetést az erő x komponensére adjuk meg.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} F_{sx} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \nu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

A tömegegységnyi légrészre ható nyomási gradiens és viszkozitási erő y és z irányú összetevője rendre:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} F_{sy} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + \nu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} F_{sz} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + \nu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

A viszkozitási erő általános alakja tehát:

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{F}_s(\mathbf{v}) = \nu \Delta \mathbf{v} + \nu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Összenyomhatatlan közegben ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) leegyszerűsödik a molekuláris viszkozitási erő:

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{F}_s(\mathbf{v}) = \nu \Delta \mathbf{v}.$$

VIII.2. A Navier-Stokes egyenletek

Nyugvó koordináta-rendszerben (Newton I. axiómája szerinti inercia-rendszerben) írjuk fel a légköri mozgásegyenletet tömegegységnyi levegőre. Foglaljuk össze, milyen erők hatnak a tömegegységnyi levegőrészre!

i.) Az abszolút gravitációs erő: $\mathbf{g}_a = -\nabla \Phi_a$.

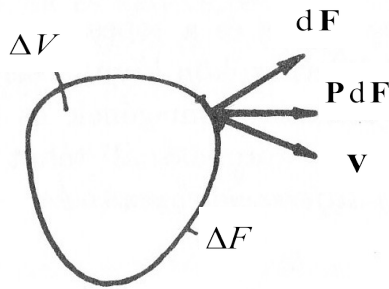
ii.) A nyomási gradiens erő: $\mathbf{F}_{grad} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$.

iii.) Egyéb (nem konzervatív) erők, a mi esetünkben a molekuláris viszkozitás: $-\frac{1}{\rho} \mathbf{F}_s(\mathbf{v})$.

A Navier-Stokes egyenletek vektoriális alakja tehát:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_a + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_s(\mathbf{v}).$$

Vektorszámítási ismereteink alapján írjuk fel a Navier-Stokes egyenletet egy elmozduló térfogatelemre!



10. ábra. A ΔV térfogatra ható felületi erők. Gruber J., Blahó M., 1973: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó. 126. ábra, 172. oldal.

Tekintsük a ΔV térfogatú ΔF felületű légrészt (10. ábra)! Erre felírva a dinamika alaptörvényét kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\Delta V(t)} \rho \mathbf{g} dV + \oint_{\Delta F} \mathbf{P} d\mathbf{F},$$

ahol a szimmetrikus \mathbf{P} „teljes” feszültségi tenzor tartalmazza az alakváltozási sebességeket, a relatív megnyúlásokat és a nyomási mező szerkezetéből származó feszültségeket.

$$\mathbf{P} = 2\mu \mathbf{D}_s - p \mathbf{E},$$

ahol \mathbf{D}_s a deriválttenzor szimmetrikus része ($\mathbf{D}_s = \mathbf{D}_s^*$), az ún. alakváltozási tenzor; μ a viszkozitási együttható, p a légnyomás, \mathbf{E} az egységtenzor. A súrlódásból eredő feszültségek a megfelelő deformációk sebességével arányosak.

A felületi erőket két részre bontjuk. A viszkozitási erőre ($2\mu \mathbf{D}_s \Delta \mathbf{F}$), ami csak viszkozus közegben ébredhet és a nyomásból származó felületi erőre ($-p \mathbf{E} \Delta \mathbf{F}$), ami megfigyelhető mind ideális, mind reális áramlási térben.

A Gauss-tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\oint_{\Delta F} \mathbf{P} d\mathbf{F} = \int_{\Delta V} \text{Div} \mathbf{P} dV,$$

vagyis

$$\int_{\Delta V} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{g}_a - \text{Div} \mathbf{P} \right) dV = \int_{\Delta V} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{g}_a + \nabla p - 2\mu \text{Div} \mathbf{D}_s \right) dV = 0.$$

Az $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ tenzor divergenciája az $\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$ koordináták rendszerében egy vektor,

amit a következőképpen kapunk:

$\text{Div} \mathbf{S} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S} \right) \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$, ahol $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S}$ derivált egy tenzor lesz, melynek alakja a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_{11}}{\partial x} & \frac{\partial s_{12}}{\partial y} & \frac{\partial s_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial s_{21}}{\partial x} & \frac{\partial s_{22}}{\partial y} & \frac{\partial s_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial s_{31}}{\partial x} & \frac{\partial s_{32}}{\partial y} & \frac{\partial s_{33}}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

VIII.3. A kontinuitási egyenlet

A kontinuitási egyenlet a tömegmegmaradás törvényét fejezi ki az áramló levegő (általánosabban folyadék vagy gáz) esetére. Tekintsük át az egyenlet alakját az Euler- és a Lagrange-féle szemléletmódban!

VIII.3.1. A kontinuitási egyenlet az Euler-féle szemléletmódban

Az Euler-féle szemléletmódban a kontinuitási egyenlet azt fejezi ki, hogy a levegő sűrűségének megváltozása az áramlási térben rögzített infinitezimális térfogatelemben megegyezik a térfogat határán be- és kiáramló tömegáramok különbségével.

A kontinuitási egyenlet levezetéséhez tekintsünk egy infinitezimálisan kicsiny téglateetet, amelynek oldalhosszai az x , y és z tengely irányában rendre dx , dy és dz (11. ábra).

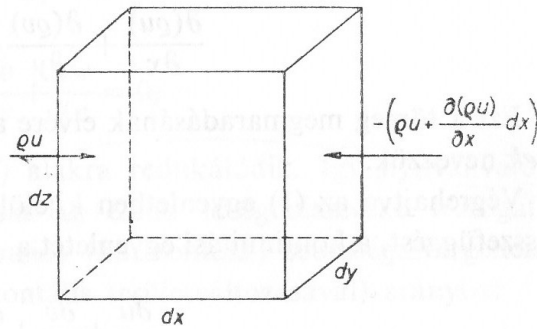
Egy dt hosszúságú időintervallum során az x irány mentén az u sebességű áramlás a bal oldali, $dy dz$ területű függőleges falon keresztül

$$(\rho u) dx dy dz dt$$

tömegű levegőt szállít. Eközben a szemközti falon keresztül

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dx dy dz dt$$

tömegű levegő távozik el.



11. ábra. A tömeg beáramlása egy infinitezimális térfogatelembe. Götz-Rákóczi: A dinamikus meteorológia alapjai, p. 173.

A térfogatelemben az x irányú légmozgás következtében fellépő nettó tömegnyereség a fentiek különbsége, azaz

$$- \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt .$$

Hasonlóan, az y - és z -irányú légmozgás következtében fellépő nettó tömegnyereség:

$$- \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz dt ,$$

illetve

$$- \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz dt .$$

A dt idő alatt a tömeg a rögzített térfogatelemben

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

értékkel növekedett meg. Ezt egyenlővé téve az áramlás során fellépő nettó tömegnyereségek összegével, a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

ún. kontinuitási egyenletet kapjuk. Röviden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) ,$$

azaz a sűrűség lokális megváltozása egyenlő a tömegáram divergenciájának -1-szeresével.

Ha az egyenlet jobb oldalán szereplő szorzatokat tagonként deriváljuk, a kontinuitási egyenlet alábbi alakjához jutunk:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Ennek értelmében a sűrűség individuális megváltozása a sebességdivergenciával arányos.

Az alábbiakban összefoglaljuk a kontinuitási egyenlet főbb egyszerűsítéseit.

1. Ha feltételezzük, hogy az áramlás stacionárius, azaz $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, a kontinuitási egyenlet alakja

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

2. Az ún. mélykonvekciós közelítés során feltételezzük, hogy a sűrűség csak a z magasság függvénye. Ekkor a sűrűség individuális megváltozása a

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot w = \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot w$$

alakra egyszerűsödik. Így a kontinuitási egyenlet mélykonvekciós közelítésben használatos alakja

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot w = -\operatorname{div} \mathbf{v},$$

vagy másképpen

$$\frac{\partial(\ln \rho)}{\partial z} \cdot w = -\operatorname{div} \mathbf{v}.$$

3. Az ún. sekélykonvekciós közelítés során a sűrűség állandóságával számolunk: $\rho = \rho_0$. Ekkor a kontinuitási egyenlet alakja

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

azaz az áramlás divergenciamentesnek tekinthető.

VIII.3.2. A kontinuitási egyenlet Lagrange-féle szemléletmódban

A Lagrange-féle szemléletmódban egy légrézst követjük. A légrézst tömege nem változik, a térfogata viszont igen. E térfogatváltozást, illetve az egységnyi tömegű levegőrész sűrűségváltozását írjuk le. A Lagrange-féle szemléletmódot elterjedten használják a nagyskálájú légköri folyamatok leírásában, a ciklogenezis modellezésében, a különböző

méretskálakon történő trajektóriaszámításban, a szennyezőanyag-terjedés modellezésében vagy a határreteg turbulens kicserélődési folyamatainak leírásában.

A Lagrange-rendszer független változói (a, b, c, t) . Az egyszerűség kedvéért legyen (a, b, c) a vizsgált légréz helyvektora a $t = t_0$ időpillanatban a szokásos Descartes-féle koordináta-rendszerben ($a = x|_{t_0}, b = y|_{t_0}, c = z|_{t_0}$). Ekkor

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t).$$

A tömegegységnyi légréz térfogatváltozását a deriválttenzor alkalmazásával adjuk meg. A kontinuitási egyenlet alakja:

$$\frac{\rho(a, b, c, t_0)}{\rho(a, b, c, t)} = \frac{\alpha(a, b, c, t)}{\alpha(a, b, c, t_0)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}}_t,$$

ahol az x , y és z helykoordináta a Lagrange-rendszerbeli változók és az idő függvénye. Az egyenlet jobb oldalán álló determináns a t_0 időpontbeli elemi légréz $(d\mathbf{a}i \times d\mathbf{b}j) \cdot d\mathbf{c}k = d\mathbf{a}d\mathbf{b}d\mathbf{c}$ térfogatának a megváltozását adja meg a t időpontban. Az elemi légréz térfogata a t időpillanatban: $((d\mathbf{x}i \times d\mathbf{y}j) \cdot d\mathbf{z}k = d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\mathbf{z})$. A relatív térfogatváltozást leíró Jakobi-determináns nem más, mint a deriválttenzor egyik skalárinvariánsa.

A Lagrange-rendszerben könnyen megadhatók a skalár- és vektorinvariánsok is, ha ismerjük a parciális deriváltak átírási szabályait az Euler-rendszerből a Lagrange-rendszerbe. Tekintsük például a Descartes-rendszerbeli divergencia alakját a Lagrange-féle szemléletmódban! A megfelelő deriváltak átírása után:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_E = \operatorname{div} \mathbf{v}_L,$$

ahol $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_L$ az Euler- és a Lagrange-rendszerbeli sebesség. (Az egyszerűség kedvéért mindkét szemléletmódban derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszerben dolgozunk.)

$$\frac{\partial u_E}{\partial x} = \frac{\partial u_L}{\partial x} = \frac{\partial u_L}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u_L}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial u_L}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial u_L}{\partial a} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)^{-1} + \frac{\partial u_L}{\partial b} \left(\frac{\partial x}{\partial b} \right)^{-1} + \frac{\partial u_L}{\partial c} \left(\frac{\partial x}{\partial c} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial v_E}{\partial y} = \frac{\partial v_L}{\partial y} = \frac{\partial v_L}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial v_L}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial v_L}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial v_L}{\partial a} \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)^{-1} + \frac{\partial v_L}{\partial b} \left(\frac{\partial y}{\partial b} \right)^{-1} + \frac{\partial v_L}{\partial c} \left(\frac{\partial y}{\partial c} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial w_E}{\partial z} = \frac{\partial w_L}{\partial z} = \frac{\partial w_L}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial w_L}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial w_L}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial w_L}{\partial a} \left(\frac{\partial z}{\partial a} \right)^{-1} + \frac{\partial w_L}{\partial b} \left(\frac{\partial z}{\partial b} \right)^{-1} + \frac{\partial w_L}{\partial c} \left(\frac{\partial z}{\partial c} \right)^{-1}.$$

VIII.4. A nedvesség- és nyomanyagszállítási egyenlet

VIII.4.1. A nedvességszállítási egyenlet

A különböző skálájú légköri mozgásrendszerek fejlődésében meghatározó szerepet játszik a vízgőztartalom változása, illetve a felhő- és csapadékképződés intenzitása, a latens hő felszabadulása. Gondoljunk csak a zivatarfelhő fejlődésére, a trópusi, illetve szubtrópusi meleg ciklonokra, vagy az Atlanti-óceán felett keletkező és kimélyülő hideg mérsékelt övi ciklonokra, amelyek elérve Európa partvidékét nem egyszer időjárási katasztrófát okoznak. (A mérsékelt övi gyors ciklonkeletkezéssel kapcsolatban már az ötvenes évek elejétől alkalmazzák a meteorológiai szakirodalomban az ún. ciklonbomba kifejezést. Ezt akkor használják, ha a ciklon centrumában a nyomássüllyedés 24 óra alatt meghaladja a 24 hPa-t (> 1 hPa/óra).) E folyamat makrofizikai modellezése a nedvességszállítási és a termodinamikai egyenlet megoldásán alapul.

A nedvességszállítási egyenletet a – jobban kezelhető – specifikus nedvesség változására írjuk fel. Kiindulási egyenleteink a ρ_m sűrűségű nedves levegőre vonatkozó

$$\frac{d\rho_m}{dt} = -\rho_m \operatorname{div} \mathbf{v}$$

tömegmegmaradási egyenlet, illetve a gőz- (ρ_v), a víz- (ρ_w) és a jégfázisban (ρ_i) levő vízre vonatkozó kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d\rho_v}{dt} = -\rho_v \operatorname{div} \mathbf{v} + M_{lv} + M_{iv} + F_v + D_v,$$

$$\frac{d\rho_w}{dt} = -\rho_w \operatorname{div} \mathbf{v} - M_{lv} + M_{il} + S_w + F_w,$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \operatorname{div} \mathbf{v} - M_{iv} - M_{il} + S_i + F_i,$$

ahol M_{lv} , M_{iv} , ill. M_{il} megadja a fázisátalakulási folyamatok sebességét. Megmutatja, hogy egységnyi idő alatt mennyi vízgőz (v) képződik a vízfázis (l) párolgásával (M_{lv}), a jégkristályok (i) szublimációjával (M_{iv}), továbbá mennyi víz keletkezik a jégkristályok olvadásából (M_{il}) az adott térrészben. Az S_w , S_i korrekciós tag fejezi ki a légréészbe besodródó, illetve behulló felhő- és csapadékelemek sebességeloszlása és a szélmező közötti különbség hatását a vízcseppecskék és a jégreszecskek szállításában. Ez teszi lehetővé pl. a cseppméreteloszlás figyelembevételével történő parametrizációs eljárások beépítését a víz- és jégfázisra vonatkozó nedvességszállítási egyenletbe. Ha a légréész a felszínnel érintkezik, akkor mindhárom egyenlet jobb oldala kiegészül egy forrás/nyelő taggal. Ez megadja, hogy mennyi vízgőz (F_v), víz (F_w), illetve jégkristály (F_i) kerül a felszínről a légréészbe, illetve a légréészből a felszínre egységnyi idő alatt. Gondoljunk csak egy város antropogén nedvesség-kibocsátására (nedves-légkondicionáló berendezések, ipartelepek, hűtőtornyok stb.), vagy egy hófúvásra, esetleg a tengeri hullámok taréjáról leszakadó és a légkörbe kerülő

vízcseppecskékre. A felszíni párolgás, illetve a kondenzáció modellezésére is készíthetünk parametrizációt, de figyelembe vehetjük e folyamatokat a molekuláris diffúzió (D_v) beépítésével is.

A molekuláris diffúziós tag (D_v) alakja:

$$D_v = \chi_v \nabla^2 \rho_v,$$

ahol χ_v a vízgőzre vonatkozó molekuláris diffúziós együttható, dimenziója [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$].

A specifikus nedvesség definíciós egyenlete:

$$q = q_v + q_w + q_i = \frac{\rho_v + \rho_w + \rho_i}{\rho_m}.$$

Természetesen telítetlen levegőben $q_v < q_{vs}$, $q_w = q_i = 0$ és $q = q_v$; telített levegőben $q_v = q_{sv}$. A specifikus nedvesség teljes időbeli megváltozása

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq_v}{dt} + \frac{dq_w}{dt} + \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_v}{\rho_m} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_w}{\rho_m} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_i}{\rho_m} \right) =$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho_m} \left(\frac{d\rho_v}{dt} + \frac{d\rho_w}{dt} + \frac{d\rho_i}{dt} \right) - \frac{d\rho_m}{dt} \left(\frac{\rho_v}{\rho_m^2} + \frac{\rho_w}{\rho_m^2} + \frac{\rho_i}{\rho_m^2} \right)$$

megadja a vízkoncentráció változását egy elemi térrészben.

Ha eltekintünk a kémiai reakcióktól, elhanyagoljuk a molekuláris diffúziós tagot, továbbá ha a légréteg nem érintkezik a felszínnel, akkor a teljes vízmennyiség csak a légrétegbe behulló, illetve besodródó felhő- és csapadékelemek mennyiségétől függ.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho_m} S_w + \frac{1}{\rho_m} S_i.$$

Ezt az összefüggést megkapjuk, ha a nedves levegőre vonatkozó kontinuitási egyenletet megszorozzuk $-\left(\frac{\rho_v}{\rho_m^2} + \frac{\rho_w}{\rho_m^2} + \frac{\rho_i}{\rho_m^2} \right)$ -tel; a vízgőz-, a víz- és a jégfázisra vonatkozó

kontinuitási egyenletet pedig a nedves levegő sűrűségének reciprokával $\left(\frac{1}{\rho_m} \right)$, majd összeadjuk azokat. A különböző fázisok specifikus nedvességeinek időbeli változása alapján felírhatjuk a vízgőzre, illetve a víz- és jégfázisra vonatkozó teljes kontinuitási egyenlet is.

$$\frac{dq_v}{dt} = \frac{1}{\rho_m} M_{lv} + \frac{1}{\rho_m} M_{iv} + \frac{1}{\rho_m} D_v,$$

$$\frac{dq_w}{dt} = -\frac{1}{\rho_m} M_{iv} + \frac{1}{\rho_m} M_{il} + \frac{1}{\rho_m} S_w,$$

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_m} M_{iv} - \frac{1}{\rho_m} M_{il} + \frac{1}{\rho_m} S_i.$$

Ha a légréz érintkezik a felszínnel, akkor további forrás és nyelő tagokat, illetve a molekuláris diffúziós folyamatokat is figyelembe kell venni (az adott feladatnak megfelelően).

VIII.4.2. A nyomanyagszállítási egyenlet

A légköri áramlási mező ismeretében egyszerűen modellezhető a szennyezőanyagok szállítása. Egy elmozduló légrézben a szennyezőanyag-koncentráció függ a besodródó szennyezőanyag mennyiségétől (S_c) (a légrézbe hulló aeroszolrészecskék, illetve a felhős és csapadékelemek által szállított szennyeződés), valamint a kémiai reakciók eredményeként bekövetkező koncentrációváltozástól (F_c), amit egy forrás/nyelő taggal parametrizálunk. Ha a légréz érintkezik a talajjal, akkor a talaj hatását egy további forrás/nyelő taggal vesszük figyelembe, ami megadja az időegység alatt a légkörbe jutó, vagy onnan kikerülő szennyezőanyag mennyiségét ($F_{c,talaj}$). Figyelembe vehetjük a molekuláris diffúziós folyamatokat (D_c) is. Hangsúlyozzuk, hogy a turbulens kicserélődési folyamatokat nem kell külön parametrizálnunk, hiszen pillanatnyi koncentrációértékekkel dolgozunk.

A szennyezőanyag-szállítási egyenletet a nedvességszállítási egyenlet analógiájára írjuk fel. Legyen ρ_c a szennyezőanyag sűrűsége,

$$c = \frac{\rho_c}{\rho_m}$$

pedig a légköri koncentrációja. Ekkor a szennyezőanyag sűrűségére vonatkozó kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d\rho_c}{dt} = \rho_c \operatorname{div} \mathbf{v} + S_c + F_c + F_{c,talaj} + D_c,$$

ahol $D_c = \operatorname{const} \chi_c \nabla^2 c$ a molekuláris diffúzió hatását leíró tag, a képletben szereplő konstans a mértékegységek közötti átváltásból származó állandó. χ_c az adott szennyezőanyagra jellemző diffúziós együttható; dimenziója [m^2s^{-1}]. A felszínközeli lamináris hártya parametrizálásától eltekintve általában elhanyagolják a molekuláris diffúziós tagot.

A nedves levegőre és az adott szennyezőanyagra vonatkozó kontinuitási egyenlet összevetéséből kapjuk a szennyezőanyag-koncentráció változására vonatkozó összefüggésünket:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{\rho_m} S_c + \frac{1}{\rho_m} F_c + \frac{1}{\rho_m} F_{c,talaj} + \frac{1}{\rho_m} D_c.$$

VIII.5. A termodinamikai egyenlet, a fázisátalakulások parametrizálása

A kontinuitási egyenletben szereplő fázisátalakulási tagok megjelennek a termodinamikai egyenletben is.

$$c_{vm} \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dt} = - \frac{1}{\rho_m} L_{lv} M_{lv} - \frac{1}{\rho_m} L_{iv} M_{iv} - \frac{1}{\rho_m} L_{il} M_{il} + c_{vm} D_T + R,$$

ahol $D_T = \chi_T \nabla^2 T$ a molekuláris diffúzió hatását leíró tag. χ_T a hőmérséklet diffúziós együtthatója (vagy hővezetési tényező), dimenziója [$m^2 \cdot s^{-1}$]. A felszínközeli lamináris hártya parametrizálásától eltekintve elhanyagolják a molekuláris diffúziós tagot. R az egyéb hőbevételt, illetve hőleadást tartalmazza. Ilyen lehet pl. a sugárzási folyamatok hatása.

A termodinamikai egyenlet általános alakjában két teljes időbeli derivált szerepel. A specifikus térfogat időbeli változását a kontinuitási egyenlet felhasználásával küszöböljük ki. Kihasználva, hogy

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_m} \right) = - \frac{1}{\rho_m^2} \frac{d\rho_m}{dt} = \frac{1}{\rho_m} \operatorname{div} \mathbf{v} = \alpha \operatorname{div} \mathbf{v}$$

kapjuk a termodinamikai egyenlet új alakját:

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{R_m T}{c_{vm}} \operatorname{div} \mathbf{v} - \left(\frac{L_{lv} M_{lv}}{c_{vm} \rho_m} + \frac{L_{iv} M_{iv}}{c_{vm} \rho_m} + \frac{L_{il} M_{il}}{c_{vm} \rho_m} \right) + D_T + \frac{1}{c_{vm}} R.$$

Természetesen a potenciális hőmérséklet definíciós egyenlete alapján is felírhatjuk a termodinamika I. főtételeit. Ekkor:

$$\frac{d\Theta}{dt} = - \frac{\Theta}{T} \left(\frac{L_{lv} M_{lv}}{c_{pm} \rho_m} + \frac{L_{iv} M_{iv}}{c_{pm} \rho_m} + \frac{L_{il} M_{il}}{c_{pm} \rho_m} \right) + \frac{\Theta}{T} D_T + \frac{\Theta}{T} \frac{1}{c_{pm}} R.$$

Ha a fázisátalakulások során nő a vízgőz mennyisége a felhőelemek rovására, akkor az ehhez szükséges hőt a légréteg biztosítja, emiatt van negatív előjel a jobb oldal első tagja előtt.