

XIV. A divergencia és a rotáció szerepe a légköri folyamatok fejlődésében

XIV.1. A cirkuláció és az örvényesség kapcsolata.....	1
XIV.2. A cirkuláció időbeli változása.....	3
XIV.2.1. A Bjerknes-féle cirkulációs elmélet néhány alkalmazása.....	10
XIV.3. A rotáció (illetve az örvényesség) időbeli változása, az örvényességi egyenlet.....	10
XIV.3.1. Az örvényességi egyenlet alakja nyomási koordináta-rendszerben.....	17
XIV.3.2. Az örvényességi egyenlet alakja potenciális hőmérsékleti koordináta-rendszerben.....	19
XIV.4. A divergencia időbeli változása, a divergenciaegyenlet.....	21

A légkör sajátja a különböző skálájú forgómozgás. Ennek leírása azonban sokkal bonyolultabb e kis viszkozitású közegben, mint a merev testek mozgásánál. A légkörben a forgó mozgás jellemzésére használt két leggyakoribb karakterisztika a cirkuláció és az örvényesség. Az előbbi egy integrális mennyiség (skalár), ami az áramló közeg makroszkopikus mérőszáma, míg az örvényesség (vektor) a forgómozgás mikroszkopikus mérőszáma (pontbeli tulajdonsága).

Az örvénylő, forgó mozgást végző légréteg térfogata, sűrűsége is változik. Ennek jellemzésére használjuk az áramlási mező divergenciáját, ami az örvényességhez hasonlóan pontbeli tulajdonság (skalár).

Természetesen az áramló közegre nemcsak a divergencia vagy az örvényesség (illetve általánosabban a rotáció), hanem ezek hatványkitevős alakjai is jellemzőek (ezekből is képezhetők az áramlás leírására szolgáló megmaradó mennyiségek).

XIV.1. A cirkuláció és az örvényesség kapcsolata

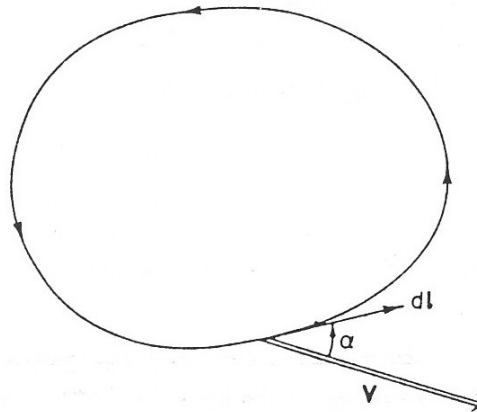
A cirkuláció egy légréteg makroszkopikus mérőszáma; integrált skalármennyiség, amely a forgómozgás irányára és erősségére utal. Matematikailag a sebesség érintőirányú összetevőjének vonalintegrálja az adott zárt görbe mentén:

$$C = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S v_s ds,$$

ahol \mathbf{v}_s az érintő irányú sebességkomponens, ds pedig a görbe menti elmozdulás, ami pozitív, ha az óramutató járásával ellentétesen mozdulunk el (ciklonális forgásirány az északi féltekén), és negatív, ha az óramutató járásával megegyezően mozgunk (anticiklonális forgásirány az északi féltekén). A $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = v_s ds$ egy skalárszorzatot reprezentál, ami tényezőnként felírva:

$$C = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S (u dx + v dy + w dz).$$

Ha egy légrést mint makroszkopikus objektumot vizsgálunk, akkor a cirkuláció természetesen függ attól, hogy milyen zárt görbe mentén haladunk a felületen, pl. milyen kétdimenziós metszetet készítünk. A cirkuláció mint mérőszám jól jellemzi pl. egy tornádó forgását (a forgástengelyre merőleges metszetben), vagy a parti-tengeri, illetve a hegy-völgyi szél fejlődését.



1. ábra. Cirkuláció zárt görbe mentén. S. Holton J.R., 1972: An introduction to dynamic meteorology, 62. oldal.

A cirkuláció szoros kapcsolatban van a rotációval. Tekintsünk egy S kerületű és F területű felületelemet! A vektorszámításban használt Stokes-tétel értelmében kapcsolat van egy adott görbe menti cirkuláció és a görbe által körülvevett területelemre jellemző rotáció között:

$$C = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_F \mathbf{\omega} \cdot \mathbf{v} \, dF,$$

ahol $d\mathbf{F}$ az elemi felületvektor.

Ha az S görbét az (x, y) síkban „összehúzzuk” egy pont köré, akkor képezve a

$$\lim_{F \rightarrow 0} \frac{C}{F} = \zeta$$

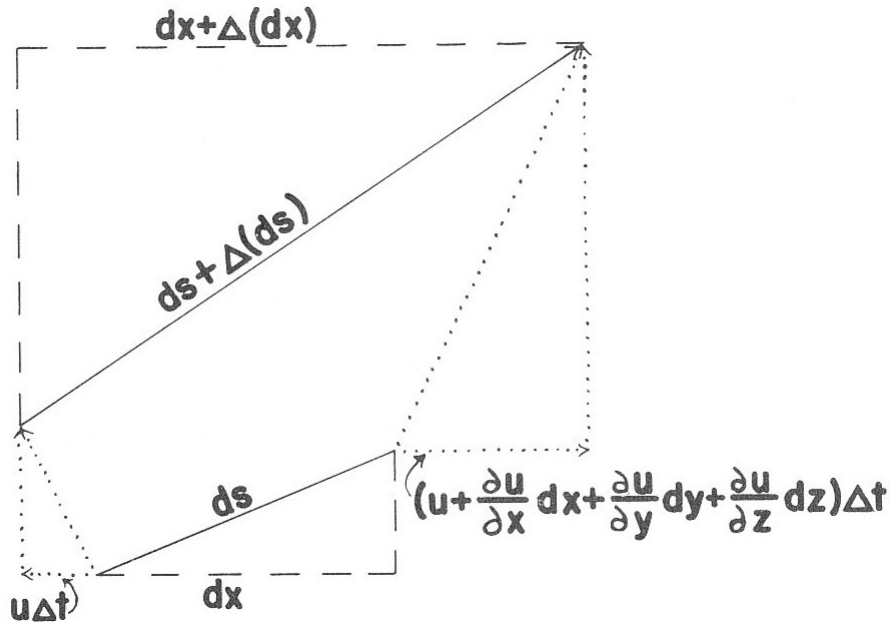
hányadost, megkapjuk az örvényesség értékét, ami nem más, mint az egységnyi vízszintes felület körüli cirkuláció, vagy más szavakkal a rotációvektor Z komponense.

XIV.2. A cirkuláció időbeli változása

A cirkuláció időbeli megváltozásáról, a vizsgált jelenség fejlődéséről a cirkuláció gyorsulása tájékoztat, ami Kelvin tétele szerint nem más, mit a gyorsulás cirkulációja, hiszen

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S (u dx + v dy + w dz) = \int_S \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right) + \int_S \left(u \frac{d}{dt} (dx) + v \frac{d}{dt} (dy) + w \frac{d}{dt} (dz) \right)$$

Nézzük meg, hogyan módosul egy időben és térben változó zárt görbe mentén az elemi elmozdulást megadó ds kifejezés! A válaszadáshoz használjuk fel a 2. ábrát.



2. ábra. Az elemi ds elmozdulás változása Δt idő alatt. Hess, S.L., 1959: Introduction to theoretical meteorology. 239. oldal.

Tekintsünk egy Δt véges időintervallumot! Nézzük meg a zárt görbe helyzetét a kiindulási és a végállapotban! A ds elmozdulás x tengelyre eső vetületét, dx -et vizsgáljuk! Ennek időbeli teljes megváltozása:

$$\frac{d}{dt} (dx) \sim \frac{d(\Delta x)}{dt} = \frac{d(x_2 - x_1)}{dt} = u_2 - u_1 = \Delta u,$$

vagyis

$$\frac{d}{dt} (dx) = du,$$

ami a Lagrange-féle szemléletmódban egyszerűen értelmezhető. Azt fejezi ki, hogy az elemi szakasz két végpontja különböző sebességgel mozdul el. (Megjegyezzük, hogy ezt a felírást már alkalmaztuk az elmúlt félévben, amikor is a kontinuitási egyenletet vezettük le, figyelembe véve a légréteg térfogatváltozását.) Ennek analógiájára a cirkuláció időbeli megváltozását leíró egyenlet jobb oldalának második tagja:

$$\int_S \left(u \frac{d}{dt} (dx) + v \frac{d}{dt} (dy) + w \frac{d}{dt} (dz) \right) = \int_S du + v dv + w dw = \int_S d \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right),$$

ami teljes derivált, vagyis a körintegrál értéke nulla. Megkaptuk tehát a Kelvin-tételt:

$$\frac{dC}{dt} = \oint_S \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right) = \oint_S \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s}.$$

Kihasználva a mozgásegyenletek Descartes-rendszerbeli alakját:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = & - \oint_S \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + \oint_S 2\Omega [(v \sin \varphi - w \cos \varphi) dx - u \sin \varphi dy + u \cos \varphi dz] + \\ & - \oint_S g dz + \oint_S (F_{sx} dx + F_{sy} dy + F_{sz} dz). \end{aligned}$$

A fenti egyenlet jobb oldala a térbeli változásokat adja meg rögzített $t = t_0$ időpillanatban. Tekintsük a $p = p(x, y, z, t_0)$ függvényt! Ekkor:

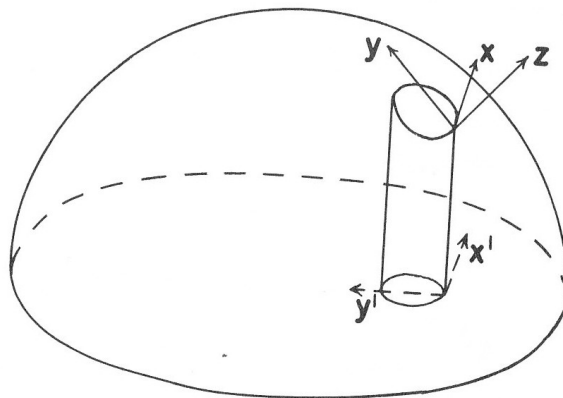
$$d p|_{t_0} = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

A továbbiakban a $d p|_{t_0} = d p$ jelölést alkalmazzuk. A cirkuláció időbeli megváltozását leíró egyenlet jobb oldalának első tagja nem más, mint:

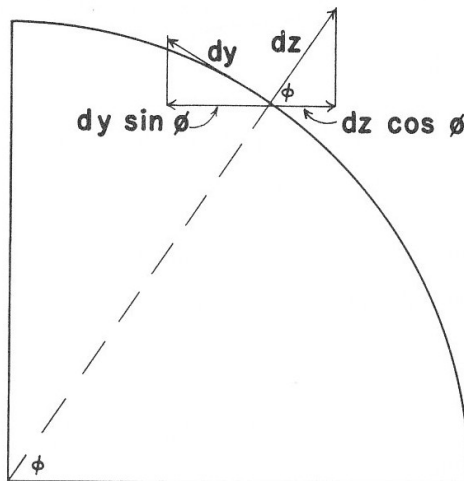
$$- \oint_S \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = - \oint_S \frac{d p}{\rho},$$

ami azt fejezi ki, hogy barotrop légkörben nincs cirkulációs gyorsulás, vagyis ha csak a nyomási gradiens erő hat a barotrop légkörben, akkor ott a cirkuláció konzervatív mennyiség. Baroklin légkörben a cirkuláció nem konzervatív mennyiség, időben változhat.

A cirkuláció időbeli változása függ az Coriolis-erőtől is. A következőkben az egyenlet jobb oldalának második tagját, az ún. Coriolis-tagot vizsgáljuk. Tekintsünk a forgó Földön egy S zárt görbét (3. ábra).



3. ábra. Egy zárt görbe egyenlítői síkra eső vetülete. Hess, S.L., 1959: Introduction to theoretical meteorology. 240. oldal.



4. ábra: Az (y, z) sík egy elemének az egyenlítői síkra eső vetülete. Hess, S.L., 1959: Introduction to theoretical meteorology. 240. oldal.

Vegyünk fel az Egyenlítő síkjában egy (x', y') koordináta-rendszert. Az x' tengely mutasson most is a képzeletbeli keleti irány, míg az y' tengely a forgástengely (a képzeletbeli északi irány) felé. A két rendszerbeli elemi elmozdulások közötti kapcsolat:

$$dx' = dx,$$

$$dy' = dy \sin \varphi - dz \cos \varphi,$$

Az elemi elmozdulások ismeretében megadhatjuk a két rendszerbeli sebességek közötti összefüggéseket is.

$$u' = u,$$

$$v' = v \sin \varphi - w \cos \varphi.$$

A fentiek alapján a Coriolis-tag a következő egyszerű alakba írható:

$$\oint_S 2\Omega [(v \sin \varphi - w \cos \varphi) dx - u \sin \varphi dy + u \cos \varphi dz] = -2\Omega \oint_{S'} (u' dy' - v' dx')$$

Adjunk hozzá és vonjunk le a $-\oint_{S'} (u' dy' - v' dx')$ kifejezésből $\oint_{S'} x' dv'$ -t! Ekkor:

$$-\oint_{S'} (u' dy' - v' dx') = -\oint_{S'} (u' dy' + x' dv') + \oint_{S'} (v' dx' + x' dv') = -\oint_{S'} (u' dy' + x' dv') + \oint_{S'} d(v' x') =$$

$$-\oint_{S'} (u' dy' + x' dv')$$

Értelmezzük a kapott eredményt! Bjerknes gondolatmenetét követve belátjuk, hogy az nem más, mint a vizsgált S' görbe által határolt légréteg területének az Egyenlítő síkjára

vonatkozó vetületének teljes időbeli megváltozása. Erre utal az integráljel mögötti kifejezés dimenziója is. Legyen F az (x', y') koordináta-rendszerben az S görbe vetületének, S' -nek a területe:

$$F = - \int_{S'} y' dx' = \int_{S'} x' dy'$$

A F terület időbeli megváltozása

$$\frac{dF}{dt} = - \int_{S'} \left[\frac{dy'}{dt} dx' + y' \frac{d}{dt}(dx') \right] = \int_{S'} \left[\frac{dx'}{dt} dy' + x' \frac{d}{dt}(dy') \right] = - \int_{S'} [v' dx' + y' du'] = \int_{S'} [u' dy' + x' dv']$$

vagyis teljesült a feltételezés. Így a cirkuláció teljes időbeli megváltozásában szerepet játszó földforgási vagy Coriolis-tag alakja:

$$- 2\Omega \frac{dF}{dt}$$

A gravitációs erő nem generál cirkulációt. Az eddigi eredmények összevetése után a cirkuláció időbeli megváltozása:

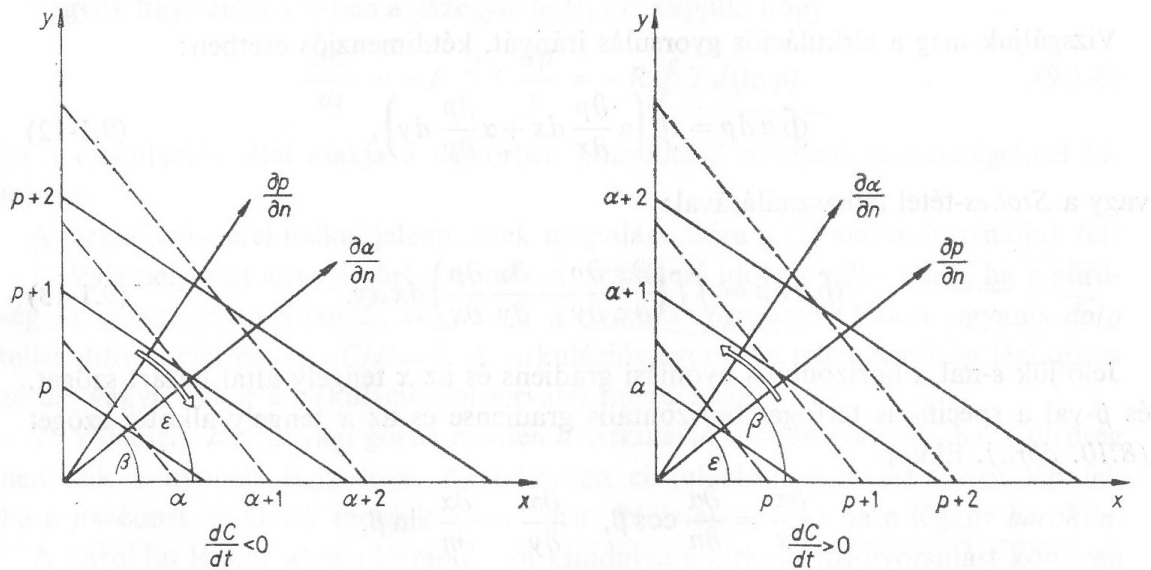
$$\frac{dC}{dt} = - \int_S \frac{d\rho}{\rho} - 2\Omega \frac{dF}{dt} + \int (F_{sx} dx + F_{sy} dy + F_{sz} dz)$$

Ez a Bjerknes-féle cirkulációs egyenlet.

Elemezzük a Bjerknes-féle cirkulációs egyenlet egyes tagjait! Mikor számíthatunk a cirkuláció időbeli növekedésére, illetve csökkenésére?

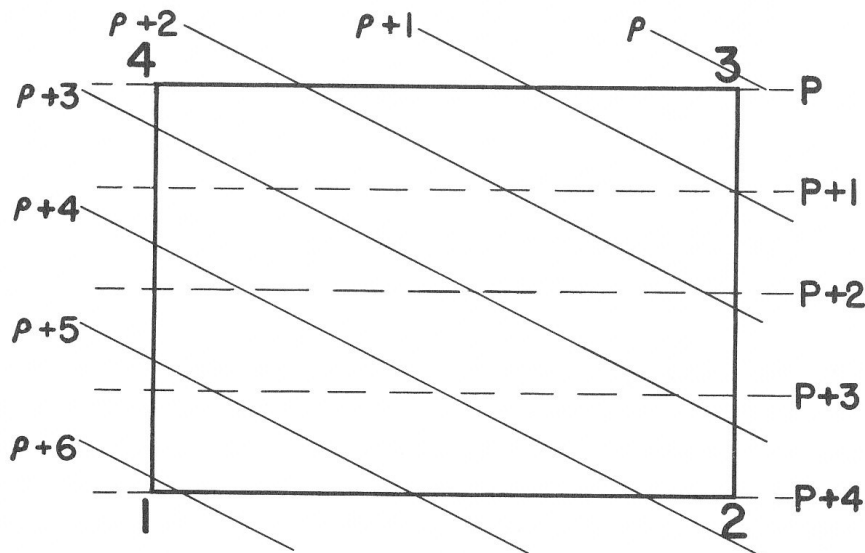
A fenti egyenlet a cirkuláció teljes időbeli változását írja le, vagyis egy háromdimenziós meteorológiai objektum valamely zárt görbéjének a mozgását követve azt kérdezi, hogy hogyan változik az adott görbe menti cirkuláció. A kiválasztott görbét mindig ugyanazok az anyagi pontok rajzolják ki (Lagrange-féle szemléletmód).

1.) Először nézzük meg az egyenlet jobb oldalának első tagját, a **szolenoidális tagot!** Ez arányos a szolenoidok számával.



5. ábra. A cirkulációs gyorsulás iránya. Götz G. és Rákóczi F.,1981: A dinamikus meteorológia alapjai, 258. oldal.

A szolenoidális tag negatív cirkulációs gyorsulást generál, ha a specifikus térfogat (α) gradiense a nyomási gradiens irányától jobbra helyezkedik el. Ellenkező esetben a szolenoidális tag pozitív (ciklonális) cirkulációt generál ($\frac{dC}{dt} > 0$).



6. ábra. Izobárok és izotermák baroklin folyadékban. Hess, S. L., 1959: Introduction to theoretical meteorology, 242. oldal.

Tekintsük az ábrán látható szolenoidális szerkezetet! Itt az áramlás az $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ görbe mentén, az óramutató járásával ellentétes irányba fog elindulni.

A cirkulációs gyorsulás pozitív. Nézzük meg az egyes elemi szakaszokban a $-\frac{\Delta p}{\rho}$ kifejezést! Tudjuk, hogy

$$-\frac{\Delta p}{\rho}\Big|_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\Delta p}{\rho}\Big|_{3 \rightarrow 4} = 0,$$

továbbá

$$\rho|_{2 \rightarrow 3} = \bar{\rho}_{23} < \rho|_{4 \rightarrow 1} = \bar{\rho}_{41} \text{ és } -\Delta p|_{2 \rightarrow 3} = \Delta p|_{4 \rightarrow 1}.$$

Így tehát:

$$-\frac{\Delta p}{\rho}\Big|_{2 \rightarrow 3} > 0, \quad -\frac{\Delta p}{\rho}\Big|_{4 \rightarrow 1} < 0 \quad \text{és} \quad \oint_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1} -\frac{d p}{\rho} \approx -\frac{\Delta p}{\rho}\Big|_{2 \rightarrow 3} - \frac{\Delta p}{\rho}\Big|_{4 \rightarrow 1} > 0.$$

A nagyobb sűrűségű levegő a kisebb sűrűségű hely felé folyik, a kisebb sűrűségű levegő pedig felemelkedik, s kezdetét veszi egy cirkulációs áramlási rendszer kialakulása. E mozgás folyamán a rendszer kinetikus energiája a potenciális energia rovására növekszik. A kialakuló cirkulációs mozgás olyan egyensúlyi helyzet létrehozására törekszik, ahol a potenciális energiának minimuma van.

A **direkt szolenoidális cirkuláció** megegyezik a szolenoidális tag által meghatározott cirkulációs iránnyal, az **indirekt szolenoidális cirkuláció** pedig ezzel ellentétes. Indirekt szolenoidális cirkuláció esetén a rendszer kinetikus energiájának egy része átalakul potenciális energiává.

Megjegyezzük, hogy a Bjerknes-féle cirkulációs elmélet a cirkuláció időbeli változását írja le, de nem szól a kiindulási helyzet ($t = t_0$) cirkulációjának előjeléről és nagyságáról.

2.) A következő lépésként elemezzük a Coriolis-tag

$$-2\Omega \frac{dF}{dt}$$

hatását a cirkulációs gyorsulás időbeli megváltozására! A cirkulációs gyorsulás pozitív, ha időben csökken a vizsgált görbe által körülvevett felületelem Egyenlítő síkjára eső vetülete, illetve negatív a cirkulációs gyorsulás, ha növekszik a zárt felületelem Egyenlítő síkjára vonatkozó vetülete. Hogyan és miért változhat az F felület (az S görbe egyenlítői vetületének nagysága)?

a.) Tegyük fel, hogy az S görbe által körbezárt terület nem változik, viszont a **hosszúsági kör menti elmozdulás** miatt (más szélességi kör – más érintősík) megváltozik az Egyenlítő síkjára vonatkozó vetület területe. Ha az északi féltekén egy állandó felületű zárt görbe északra mozdul el, akkor nő az egyenlítői vetület, tehát csökken a cirkulációs gyorsulás. Ellentétes a helyzet, ha a zárt görbe az Egyenlítő irányába mozdul. Ekkor csökken a vetület területe, vagyis pozitív lesz a cirkuláció gyorsulása. Azt mondhatjuk, hogy az északi féltekén **egy ciklonális rendszer cirkulációja nő** (a ciklon megerősödik), **ha a rendszer dél felé tolódik**, és csökken a cirkuláció, ha a ciklon északias sebességgel halad. Anticiklon esetén (negatív cirkuláció) fordított a helyzet. **Az anticiklon cirkulációja erősödik** (nagyobb negatív értékű lesz), **ha északias irányba helyeződik át** (nő az Egyenlítő síkjára vonatkozó vetület területe). Ha az anticiklon délies irányba mozdul el, akkor a Coriolis-tag – a csökkenő

vetületi terület miatt – pozitív cirkulációs gyorsulást okoz, vagyis csökkenti az anticiklonális áramlást. A rendszer leépül.

b.) A Coriolis-tag változhat akkor is, ha a horizontális áramlási mező nem divergenciamentes. Ha az áramlási mező divergens, akkor az S görbe által közrezárt felület, és így e felület Egyenlítő síkjára vonatkozó vetülete is nő. Így tehát a horizontális divergencia erősíti az anticiklonális cirkulációt és gyengíti a ciklonális cirkulációt. A konvergencia mező hatása ezzel ellentétes: itt erősödik a ciklonális cirkuláció, illetve gyengül az anticiklonális cirkuláció.

c.) Változhat az S görbe által körbezárt terület akkor is, ha a vizsgált felület vertikálisan mozdul el (pl. változik egy hegyen átkelő légréz alapterülete).

Megjegyezzük, hogy az x tengelyű (y, z) síkban történő cirkulációs mozgás esetén a Coriolis-tag zérus, hiszen az egyenlítői vetület egy egyenes szakasz lesz. Más esetben, pl. az y tengelyű, (x, z) síkban elhelyezkedő S görbének már van egyenlítői síkba eső vetülete (bár sokszor elhanyagolhatóan kis értékű).

3.) A harmadik tag a súrlódási erő cirkulációt generáló hatását adja meg:

$$\oint_S (F_{Sx} dx + F_{Sy} dy + F_{Sz} dz)$$

Ciklonális rendszerben a súrlódási erő negatív cirkulációs gyorsulást generál, vagyis gyengíti a ciklonális örvénylést, anticiklonális esetben a fellépő súrlódási erő pozitív cirkulációs gyorsulást okoz; szintén gyengíti az anticiklonális cirkulációt. Az ábrán a súrlódási erő hatását mutatjuk be egy ciklon és egy anticiklon esetén a Guldberg-Mohn-féle elmélet alapján.

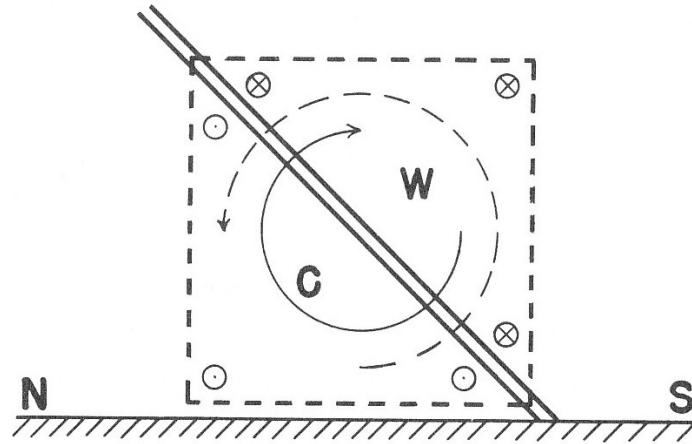
Megjegyezzük, hogy a súrlódásos áramlás ciklonális rendszerben horizontális konvergenciát, anticiklonban horizontális divergenciát generál, ami a Coriolis-tagon keresztül fejt ki hatását. Ez ellentétes az előbb vázoltakkal.

Tekintsük az (x, y) síkban levő S görbét és az általa közrezárt felületet. A súrlódás hatására ciklonális rendszerben (az áramlási mező konvergenciája miatt) $\frac{dF}{dt} < 0$, vagyis a Coriolis-tag a súrlódási taggal ellentétesen működik – pozitív cirkulációs gyorsulást generál. Anticiklonális rendszerben a súrlódás hatására a horizontális sebességi mezőben erősödik a divergencia, ami az S görbe Egyenlítő síkjára vonatkozó területének időbeli növekedését eredményezi $\left(\frac{dF}{dt} > 0\right)$, vagyis a súrlódás a horizontális sebességi mező divergenciáján keresztül csökkenti a cirkulációt, azaz erősíti az anticiklonális áramlási rendszert.

XIV.2.1. A Bjerknes-féle cirkulációs elmélet néhány alkalmazása

- a.) Helyi szelek kialakulásának magyarázata (pl. tengeri-parti szél).
 - Meghatározó a szolenoidális tag.
- b.) A frontfelület hajlata.
 - Szolenoidális tag – pozitív cirkulációs gyorsulás.

- Horizontális szélnyírás \rightarrow a kezdetben horizontális tengelyű S görbe egyenlítői síkra vonatkozó vetülete nő \rightarrow a szolenoidális taggal ellentétes hatás \rightarrow csökkenő cirkulációs gyorsulás.



7. ábra. A front vertikális észak-déli irányú keresztmetszete. Hess, S. L., 1959: Introduction to theoretical meteorology, 246.

XIV.3. A rotáció (illetve az örvényesség) időbeli változása, az örvényességi egyenlet

Az adott felület körüli cirkuláció egyúttal a felület normális irányába eső rotációkomponens értékéről is tájékoztat. Ha a vizsgált felület a Descartes-féle koordináta-rendszer (x, y) síkjába esik akkor az F felület körüli C cirkulációból, illetve azok megváltozásából $[d(C), d(F)]$ az örvényességre és annak teljes időbeli megváltozására következtethetünk.

$$\xi = \frac{C}{F}, \text{ pontosabban } \xi = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{C}{F},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\left(\lim_{F \rightarrow 0} \frac{C}{F}\right)}{dt} = \lim_{F \rightarrow 0} \left(\frac{1}{F} \frac{dC}{dt} \right) - \lim_{F \rightarrow 0} \left(\frac{C}{F^2} \frac{dF}{dt} \right).$$

A meteorológiai gyakorlatban legtöbbször, pl. előrejelzés készítésekor, időjárás-analízisnél az Euler-féle szemléletmódot használjuk, ezért a gyakorló meteorológust a lokális időbeli változások érdeklik. Ez az oka annak, hogy a cirkuláció időbeli megváltozására felírt egyenlet helyett (ami kimondatlanul is egy zárt görbe helyzetének és cirkulációjának időbeli teljes megváltozását adja meg, tehát a Lagrange-szemléletmód szerint értelmezhető könnyebben) az örvényesség, illetve a rotáció – mint pontbeli tulajdonság – lokális változását tanulmányozzuk.

Az **örvényességi egyenlet** levezetésekor induljunk ki a Descartes-rendszerben felírt horizontális mozgásegyenletekből. Itt nincsenek metrikus gyorsulási tagok, vagyis a Föld adott pontjára illesztett érintősíkon dolgozunk – nem görbül a felület, kivéve a Coriolis-paraméter hosszúsági körök szerinti megváltozását $\left(\beta = \frac{\mathcal{F}}{\partial y} = \frac{\partial 2\Omega \sin \varphi}{\partial y} = \frac{\partial 2\Omega \sin \varphi}{r_F \partial \varphi} \neq 0 \right)$, vagyis a planetáris örvényesség (a szögsebességvektor aktuális szélességi körre vonatkozó függőleges komponensét vesszük figyelembe). Ilyen értelemben a Coriolis-paraméter meghatározásakor továbbra is a földgömbön mozgunk. Az egyenletekben elhanyagoljuk a Coriolis-erő vertikális sebességet tartalmazó összetevőjét.

$$2 \Omega |v| \sin \varphi \gg 2 \Omega |w| \cos \varphi .$$

A **nagyskálájú folyamatokban** elemezzük az örvényesség lokális időbeli változását. Az örvényességi egyenlet kiszámításához deriváljuk az \mathcal{X} irányú mozgásegyenletet \mathcal{Y} szerint, az \mathcal{Y} irányú mozgásegyenletet pedig \mathcal{X} szerint, majd az utóbbi egyenletből vonjuk ki az előbbit!

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_{Sx}, \quad (+\frac{a}{R})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_{Sy}, \quad (+\frac{a}{R})$$

Felhasználva az örvényesség (ζ) és a horizontális divergencia (D) definícióját

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + v \frac{\mathcal{F}}{\partial y} = \\ = - (f + \zeta) D - \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial F_{Sy}}{\partial x} - \frac{\partial F_{Sx}}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Kihhasználva, hogy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\mathcal{F}}{\partial t} + u \frac{\mathcal{F}}{\partial x} + v \frac{\mathcal{F}}{\partial y} + w \frac{\mathcal{F}}{\partial z} = v \frac{\mathcal{F}}{\partial y}$$

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} = \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial x} + v \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y} + w \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial z} =$$

I Ia Ib Ic Id

$$= - (f + \zeta) D - \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{sy}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}_{sx}}{\partial y} \right].$$

II

III

IV

V

Nézzük meg az örvényességi egyenlet egyes tagjait! A nagyságrendi becslés elkészítéséhez felhasználjuk hogy a nagyskálájú horizontális sebességi mező mindig felbontható egy divergenciamentes és ($\mathbf{v}_{h\psi}$) és egy örvényességmentes ($\mathbf{v}_{h\chi}$) rész összegére, mégpedig úgy, hogy a divergenciamentes sebességkomponens egy nagyságrenddel nagyobb mint az örvényességmentes sebességkomponens. E következtetést a nagyskálájú folyamatok statisztikai elemzéséből vonták le.

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_{h\psi} + \mathbf{v}_{h\chi} \quad \text{és} \quad \Delta \mathbf{v}_h = \Delta \mathbf{v}_{h\psi} + \Delta \mathbf{v}_{h\chi}.$$

Az egyes sebességkomponensek nagyságrendje:

$$u \sim u_{\psi} \sim v \sim v_{\psi} \sim 10 \text{ m s}^{-1}, \quad \text{illetve} \quad u_{\chi} \sim v_{\chi} \sim 1 \text{ m s}^{-1}.$$

A sebesség-összetevők térbeli ($\Delta x \sim \Delta y \sim 10^6 \text{ m}$, $\Delta z \sim 10^4 \text{ m}$) és időbeli ($\Delta t \sim 10^5 \text{ s}$) megváltozására teljesül, hogy

$$\Delta u \sim \Delta u_{\psi} \sim \Delta v \sim \Delta v_{\psi} \sim 10 \text{ m s}^{-1}, \quad \text{illetve} \quad \Delta u_{\chi} \sim \Delta v_{\chi} \sim 1 \text{ m s}^{-1}.$$

Szintén feltesszük, hogy az örvényesség térbeli és időbeli változása megegyezik az örvényesség nagyságrendjével ($\zeta \sim \Delta \zeta \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), a horizontális divergencia, illetve a divergencia megváltozásának (ez utóbbi itt még nem szerepel) karakterisztikus értéke: $D \sim \Delta D \sim 10^{-6} \text{ s}^{-1}$.

Az egyenlet bal oldalán szerepel az abszolút örvényesség időbeli teljes megváltozása (I), amit, ha részletesen kifejtünk: megkapjuk az abszolút örvényesség lokális megváltozását (Ia) az abszolút örvényességi advekciót (Ib + Ic) és az abszolút örvényesség konvektív hatásokra történő megváltozását (Id). Az egyes tagok nagyságrendje:

$$\frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2},$$

$$u \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial x} = u \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2}, \quad v \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y} = v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \frac{\partial f}{\partial y} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2},$$

$$w \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial z} = w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2}.$$

$\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ karakterisztikus értéke, $10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$. Az abszolút örvényességi advekció nagyságrendje tehát megegyezik a relatív örvényességi advekció nagyságrendjével.

Az abszolút örvényesség teljes időbeli megváltozásának nagyságrendje:

$$\frac{d(\xi + f)}{dt} = \frac{\partial(\xi + f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\xi + f)}{\partial x} + v \frac{\partial(\xi + f)}{\partial y} + w \frac{\partial(\xi + f)}{\partial z} \sim 10^{-10} \text{s}^{-2} .$$

Az örvényességi egyenlet jobb oldala mutatja azokat a hatásokat, amelyek felelősek az abszolút örvényesség időbeli teljes megváltozásáért.

Elsőként a divergencia-tag (II) viselkedését elemezzük. Ez két tag összegeként adható meg. Külön kell vizsgálni a divergencia (D) és a planetáris örvényesség (f) szorzatát, illetve a divergencia és a relatív örvényesség (ξ) szorzatát, hiszen ezek különböző nagyságrendűek:

$$- (f + \xi)D = - fD - \xi D .$$

II IIa IIb

$$- fD \sim 10^{-10} \text{s}^{-2} , \quad - \xi D \sim 10^{-11} \text{s}^{-2} \quad \text{és} \quad - (f + \xi)D \sim 10^{-10} \text{s}^{-2} .$$

A mindig pozitív planetáris örvényesség a mérsékelt övben általában egy nagyságrenddel meghaladja a relatív örvényességet ($f \sim 10^{-4} \text{s}^{-1} \ll \xi \sim 10^{-5} \text{s}^{-1}$).

A horizontális divergencia és a planetáris örvényesség szorzatától függő $- fD$ tag (IIa) növeli az abszolút örvényességet, ha a mező konvergens ($D < 0$), illetve csökkenti az abszolút örvényességet, ha a mező divergens ($D > 0$). Így a konvergenciamező a ciklon, míg a divergenciamező az anticiklon fejlődésének kedvez.

A horizontális divergencia és a relatív örvényesség szorzatától függő $- \xi D$ tag (IIb) divergens horizontális szélességi mezőben csökkenti az abszolút örvényesség abszolút értékének időbeli teljes megváltozását, tehát a ciklon, illetve az anticiklon fejlődése ellen hat. Konvergenciamezőben a helyzet fordított.

A II tagban a IIa, vagyis a divergencia és a planetáris örvényesség szorzatából származó rész a meghatározó.

A (III) a forgatási csavarási tag. Mindkét összetevője ugyanolyan nagyságrendű.

$$- \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \sim 10^{-11} \text{s}^{-2} .$$

IIIa IIIb

Ez a tag a rotáció x és y irányú összetevőjének az örvényességi mező szerkezetére gyakorolt hatását adja meg. Vagyis azt mutatja, hogy a magassági szélnyírás hatására hogyan nyíródik egy-egy kezdetben (x, z) , illetve (y, z) síkban lévő elemi felület. (Hogyan változnak időegység alatt az Egyenlítő síkjára vonatkozó vetületek?) A forgatási csavarási tag a vertikális szélnyírás következménye. Ha nincs vertikális szélnyírás, vagyis ha nincs termikus szél (geosztrofikus szélközelítés esetén)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 ,$$

akkor a forgatási csavarási tag nulla. Nem kell számolnunk e tag fellépésével akkor sem, ha a vertikális sebességi mező horizontálisan homogén.

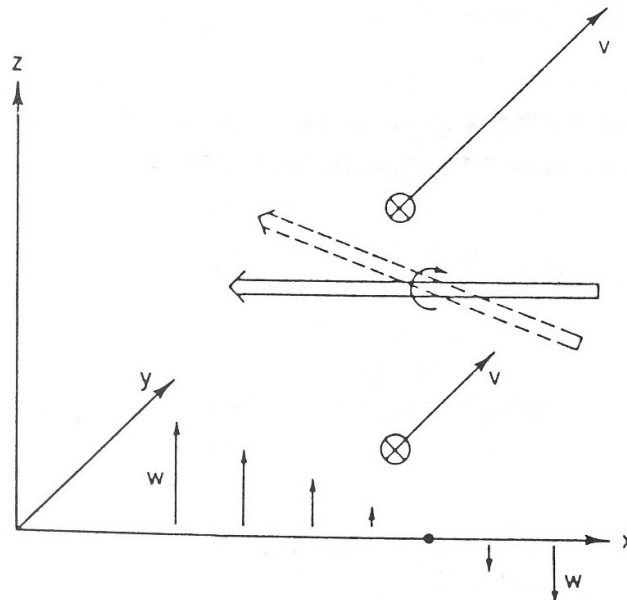
A horizontális sebesség vertikális nyírásának, illetve a vertikális sebesség horizontális nyírásának a rotáció x és y irányú összetevőjére gyakorolt hatását jól szemlélteti a nyírási

csavarási tag következő felbontása: induljunk ki a rotáció, illetve a horizontális szélesség vertikális nyírását, valamint a vertikális szélesség horizontális nyírását megadó vektorok alakjából!

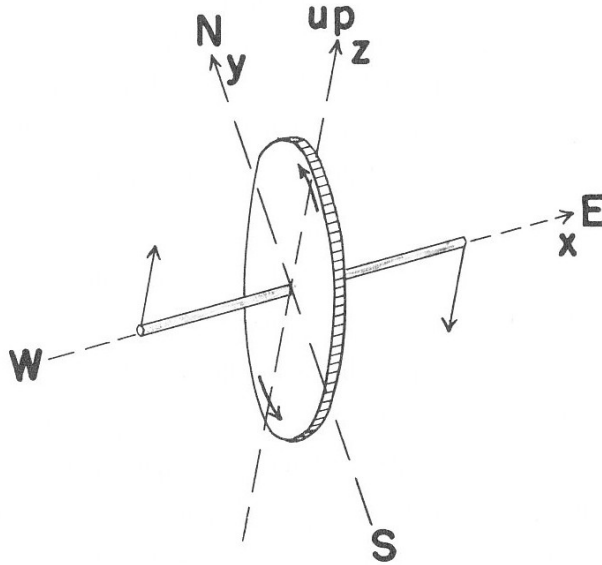
$$\mathbf{rotv} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_h w = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a forgatási csavarási tag alakja vektoriálisan:

$$\frac{1}{2} \left(\mathbf{rotv} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} + \mathbf{rotv} \cdot \nabla_h w \right) = -\mathbf{k} \cdot \left(\nabla_h w \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} \right) = \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} \times \nabla_h w \right).$$



8. ábra. A nyirási-csavarási tag szerepe az orvenyeség keletkezésében. Holton J.R., 1972: An introduction to dynamic meteorology, 74. oldal.



9. ábra. Egy forgo korong, mint a dolesi (vagy nyirasi-csavarasi) tag szilard test analogiaja az orvenyesség;g keletkezeseben. Hess, S. L., 1959: Introduction to theoretical meteorology, 249.

Az egyenlet jobb oldalának IV. összetevője a szolenoidális tag, ami a Descartes-féle koordináta-rendszer (x, y) síkjában lévő szolenoidok hatását mutatja az abszolút örvényesség időbeli megváltozásában. E tag nagyságrendje:

$$- \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right] \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2}$$

V. Bjerkes cirkulációs elméletéből tudjuk, hogy a szolenoidális tag alakja:

$$- \oint_S \frac{d p}{\rho} = - \oint_S \left(\alpha \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dx + \alpha \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} dy \right).$$

A fenti kifejezést alakítsuk át a Stokes-tétel felhasználásával! A Stokes-tételt az

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

deriválható függvény segítségével – a szokásos jelölések alkalmazásával – a következő jól ismert alakban írjuk fel:

$$\oint_S \mathbf{f}(x, y) ds = \oint_S (f_x dx + f_y dy) = \int_F \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Így a deriválás elvégzése után a szolenoidális tag alakja:

$$- \oint_S \frac{d p}{\rho} = - \int_F \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) dx dy \sim - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) F = F \left(\frac{d \zeta}{dt} \right)_{\text{szolenoidális}}$$

Az örvényességi egyenlet jobb oldalának utolsó V. tagja a súrlódási erő hatását mutatja az abszolút örvényességi mező fejlődésében. A súrlódási erő figyelembevétele fontos a planetáris határrétegben, illetve a szélnyírási zónákban. E tag nagyságrendje:

$$\left[\frac{\partial F_{sy}}{\partial x} - \frac{\partial F_{sx}}{\partial y} \right] \leq 10^{-10} \text{ s}^{-2} .$$

Vektoriálisan felírva: a súrlódási tag alakja:

$$(\nabla \times \mathbf{F}_s) \cdot \mathbf{k} .$$

A cirkulációs elméletben szereplő súrlódási tag és az örvényességi egyenletben szereplő súrlódási tag közötti kapcsolatot a Stokes-tétel felhasználásával szemléltetjük.

$$\left(\frac{dC}{dt} \right)_{\text{Súrlódás}} = \oint_S \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\nabla \times \mathbf{F}_s) \cdot d\mathbf{F} \sim \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F}_s$$

és

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right)_{\text{súrlódás}} \sim \frac{1}{F} \frac{dC}{dt} = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_s) = \left(\frac{\partial F_{sy}}{\partial x} - \frac{\partial F_{sx}}{\partial y} \right) .$$

XIV.3.1. Az örvényességi egyenlet alakja nyomási koordináta-rendszerben

Számos olyan meteorológiai feladat van (pl. numerikus modellfejlesztés, AT-térképek készítése és analízise, izobár trajektóriák számítása), ahol sikerrel használhatjuk a nyomási rendszerben felírt **örvényességi egyenletet**. Az egyenlet előállításakor induljunk ki a P -rendszerbeli horizontális mozgásegyenletekből! Az örvényességi egyenlet kiszámításához ismét deriváljuk az x irányú (Descartes-rendszerbeli) mozgásegyenletet y , az y irányú mozgásegyenletet x szerint (egy izobárfelületen haladva), majd az utóbbi egyenletből vonjuk ki az előbbit!

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{\partial u_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial y} + \omega \frac{\partial u_p}{\partial p} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + f v_p + F_{sx_p} , \left(- \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{\partial v_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial y} + \omega \frac{\partial v_p}{\partial p} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f u_p + F_{sy_p} , \left(+ \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

ahol $\omega = \frac{dP}{dt}$ a P -rendszerbeli vertikális sebesség. Tudjuk továbbá, hogy

$$x_p = x , y_p = y , dx_p = dx , dy_p = dy , u_p = u , v_p = v .$$

Felhasználva az örvényesség (ξ_p) és a horizontális divergencia (D_p) definícióját:

$$\xi_p = \frac{\partial v_p}{\partial x} - \frac{\partial u_p}{\partial y}, \quad D_p = \frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \quad (\text{természetesen } \xi_p \neq \xi, \quad \zeta_p \neq \zeta)$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \xi_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial \xi_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial \xi_p}{\partial y} + \omega \frac{\partial \xi_p}{\partial p} + v_p \frac{\partial f}{\partial y} = \\ & = - (f + \xi_p) D_p - \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v_p}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u_p}{\partial p} \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{S_{y_p}}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}_{S_{x_p}}}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Kihasználva, hogy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_p \frac{\partial f}{\partial x} + v_p \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial p} = v_p \frac{\partial f}{\partial y},$$

az abszolút örvényesség teljes időbeli megváltozása:

$$\begin{aligned} \frac{d(\xi_p + f)}{dt} &= \frac{\partial(\xi_p + f)}{\partial t} + u_p \frac{\partial(\xi_p + f)}{\partial x} + v_p \frac{\partial(\xi_p + f)}{\partial y} + \omega \frac{\partial(\xi_p + f)}{\partial p} = \\ & \quad \text{I} \quad \text{Ia} \quad \text{Ib} \quad \text{Ic} \quad \text{Id} \\ & = - (f + \xi_p) D_p - \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v_p}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u_p}{\partial p} \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{S_{y_p}}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}_{S_{x_p}}}{\partial y} \right]. \\ & \quad \text{II} \quad \text{III} \quad \text{V} \end{aligned}$$

Felismerhetjük az egyenlet bal oldalán az abszolút örvényesség időbeli teljes megváltozását (I) és annak felbontását lokális (Ia), advektív (Ib, Ic) és konvektív (Id) hatásra. A jobb oldal első tagja itt is a divergencia és az abszolút örvényesség (a planetáris + a relatív örvényesség) szorzatától függő tag (II). Megvan a forgatási csavarási tag (III) és a sűrűlási tag (V). Hiányzik viszont a szolenoidális tag. Ez érthető, hiszen most egy horizontális felület egyben izobárfelület is, tehát itt $d p(x, y) = 0$.

A P -rendszerbeli örvényességi egyenlet nem explicit, hanem implicit módon tartalmazza a Z -rendszerbeli szolenoidális tag hatását. Ez érthetővé válik, ha arra gondolunk, hogy más a horizontális felület helyzete egy külső szemlélő számára a P -rendszerben, mint a Z -rendszerben. Más a két rendszerben a horizontális divergencia és örvényesség alakja. Tudjuk, hogy:

$$u_p(x, y, p, t) = u_z(x, y, z(x, y, p, t), t) \quad \text{és} \quad v_p(x, y, p, t) = v_z(x, y, z(x, y, p, t), t).$$

Ezt felhasználva például az u sebességkomponens x irányú deriváltja a Z -rendszerben a következőképpen fejezhető ki a nyomási rendszerben: a

$$\left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \right)_{y,p,t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y,z,t} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p,t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y,z,t} - \rho g \left(\frac{\partial u_p}{\partial p} \right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p,t}$$

egyenlőség alapján:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z,t} = \left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)_{y,p,t} + \rho g \left(\frac{\partial u_p}{\partial p}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p,t}.$$

A fenti egyenlet analógiájára átírhatók a horizontális sebességkomponensek más parciális deriváltjai is, s így megadható az örvényesség és a horizontális divergencia átírása is:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z,t} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z,t} = \left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)_{y,p,t} + \left(\frac{\partial v_p}{\partial y}\right)_{x,p,t} + \rho g \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial p}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p,t} + \left(\frac{\partial v_p}{\partial p}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p,t} \right]$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y,z,t} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x,z,t} = \left(\frac{\partial v_p}{\partial x}\right)_{y,p,t} - \left(\frac{\partial u_p}{\partial y}\right)_{x,p,t} + \rho g \left[\left(\frac{\partial v_p}{\partial p}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p,t} - \left(\frac{\partial u_p}{\partial p}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p,t} \right]$$

Az átírásokat fordított irányba is megtehetjük. Ekkor:

$$u_z(x, y, z, t) = u_p(x, y, p(x, y, z, t), t) \quad \text{és} \quad v_z(x, y, z, t) = v_p(x, y, p(x, y, z, t), t).$$

Ezt felhasználva pl. az u sebességkomponens x irányú deriváltja a nyomási-rendszerben a következőképpen írható át a Z -rendszerbe a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z,t} = \left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)_{y,p,t} + \left(\frac{\partial u_p}{\partial p}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t} = \left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)_{y,p,t} - \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t}$$

egyenlőség alapján:

$$\left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)_{y,p,t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z,t} + \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t}.$$

A fenti egyenlet analógiájára átírhatók a horizontális sebességkomponensek más parciális deriváltjai is. Ezek felhasználásával már megadhatjuk az örvényesség és a horizontális divergencia alakját is az (x, y, z, t) koordináta-rendszerben.

$$\left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)_{y,p,t} + \left(\frac{\partial v_p}{\partial y}\right)_{x,p,t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z,t} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z,t} + \frac{1}{\rho g} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t} + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z,t} \right]$$

$$\left(\frac{\partial v_p}{\partial x}\right)_{y,p,t} - \left(\frac{\partial u_p}{\partial y}\right)_{x,p,t} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y,z,t} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x,z,t} + \frac{1}{\rho g} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z,t} \right]$$

Jól látható a jobb oldalak második tagjában a Z -rendszerbeli nyomási gradiens és a vertikális szélnyírás szerepe. A két rendszerben felírt örvényesség és horizontális divergencia eltérő értékében van elrejtve a szolenoidális tag.

XIV.3.2. Az örvényességi egyenlet alakja potenciális hőmérsékleti koordináta-rendszerben

Frontanalízisek, izentrop-trajektóriák készítésekor sikerrel használják a potenciális hőmérsékleti rendszerben felírt **örvényességi egyenletet**. Az egyenlet előállításakor az (x, y, z, t) Descartes-rendszerbeli horizontális mozgásegyenletek Θ -rendszerbeli alakjából indulunk ki. Az örvényességi egyenlet kiszámításához ismét deriváljuk az x irányú mozgásegyenletet y , az y irányú mozgásegyenletet pedig x szerint egy ekvivaláris felületen,

($\Theta = \text{const}$), majd az utóbbi egyenletből vonjuk ki az előbbit! Az egyenlet felírásakor a nyomási rendszerben alkalmazott gondolatmenetet követjük. A tagok alakja, jelentése megegyezik a P -rendszerbeli egyenlet tagjaival, azonban más ekvivaláris felületen mozgunk, tehát az új rendszerben az egyes deriváltaknak, s az egyes tagoknak is más lesz az értékük mint volt a P -, vagy a Z -rendszerben.

Írjuk fel a Θ -rendszerbeli horizontális mozgásegyenleteket (Descartes-féle koordináta-rendszerben), és jelöljük ki az elvégzendő deriválásokat!

$$\frac{du_{\Theta}}{dt} = \frac{\partial u_{\Theta}}{\partial t} + u_{\Theta} \frac{\partial u_{\Theta}}{\partial x} + v_{\Theta} \frac{\partial u_{\Theta}}{\partial y} + w_{\Theta} \frac{\partial u_{\Theta}}{\partial \Theta} = - \frac{\partial v}{\partial x} + f v_{\Theta} + F_{Sx_{\Theta}}, \quad \left(- \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{dv_{\Theta}}{dt} = \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial t} + u_{\Theta} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial x} + v_{\Theta} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial y} + w_{\Theta} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial \Theta} = - \frac{\partial v}{\partial y} - f u_{\Theta} + F_{Sy_{\Theta}}, \quad \left(+ \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

ahol $w_{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$ a Θ -rendszerbeli vertikális sebesség, $v = c_p T + \Phi$ pedig a Montgomery-potenciál. Tudjuk továbbá, hogy

$$x_{\Theta} = x, \quad y_{\Theta} = y, \quad dx_{\Theta} = dx, \quad dy_{\Theta} = dy, \quad u_{\Theta} = u, \quad v_{\Theta} = v.$$

Felhasználva az örvényesség (ζ_{Θ}) és a horizontális divergencia (D_{Θ}) definícióját:

$$\zeta_{\Theta} = \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial x} - \frac{\partial u_{\Theta}}{\partial y}, \quad D_{\Theta} = \frac{\partial u_{\Theta}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial y} \quad (\text{természetesen } \zeta_{\Theta} \neq \zeta_p \neq \zeta, \quad D_{\Theta} \neq D_p \neq D)$$

és kihasználva, hogy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_{\Theta} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{\Theta} \frac{\partial f}{\partial y} + w_{\Theta} \frac{\partial f}{\partial \Theta} = v_{\Theta} \frac{\partial f}{\partial y}$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\zeta_{\Theta} + f)}{dt} &= \frac{\partial(\zeta_{\Theta} + f)}{\partial t} + u_{\Theta} \frac{\partial(\zeta_{\Theta} + f)}{\partial x} + v_{\Theta} \frac{\partial(\zeta_{\Theta} + f)}{\partial y} + w_{\Theta} \frac{\partial(\zeta_{\Theta} + f)}{\partial \Theta} = \\
 &\quad \text{I} \qquad \text{Ia} \qquad \text{Ib} \qquad \text{Ic} \qquad \text{Id} \\
 &= - (f + \zeta_{\Theta}) D_{\Theta} - \left[\frac{\partial w_{\Theta}}{\partial x} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial \Theta} - \frac{\partial w_{\Theta}}{\partial y} \frac{\partial u_{\Theta}}{\partial \Theta} \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{sv_{\Theta}}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}_{sv_{\Theta}}}{\partial y} \right] \\
 &\quad \text{II} \qquad \text{III} \qquad \text{V}
 \end{aligned}$$

Felismerhetjük az egyenlet bal oldalán – hasonlóan a P -rendszerbeli örvényességi egyenlethez – az abszolút örvényesség időbeli teljes megváltozását (I) és annak felbontását a lokális (Ia), az advektív (Ib, Ic) és a konvektív (Id) hatásra. A jobb oldal első tagja itt is a divergencia és a planetáris, illetve a relatív örvényesség szorzatától függő tag (II). Megvan a forgatási csavarási tag (IV) és a súrlódás hatása (V). Hiányzik viszont a szolenoidális tag. Ez érthető, hiszen most egy horizontális felület egyben izentrop felület is. $d\Theta(x, y) = 0$ és

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p},$$

vagyis izentrop felületen nem generál cirkulációs gyorsulást a nyomási gradiens erő.

A fenti levezetésekhez hasonlóan más koordináta-rendszerben (pl. felszínkövető z^* -rendszer, vagy a σ -rendszer) is megadhatjuk az örvényességi egyenletet. E két koordináta-rendszerben természetesen szerepelni fog a szolenoidális tag.

A fentiekhez hasonló módon vezethetjük le a más síkokra [pl. (x, z) , (y, z)] vonatkozó örvényességi egyenletet, pontosabban a rotációmező időbeli megváltozását valamely sík normálisának irányába.

Az örvényességi egyenlet általános alakját tovább alakíthatjuk pl. a sebességpotenciál és az áramfüggvény bevezetésével, vagy a szélsősebességi mező geosztrofikus és ageosztrofikus összetevőkre történő felbontásával. Azt, hogy melyik alakját választjuk az örvényességi egyenletnek, mindig a konkrét meteorológiai feladat szabja meg.

XIV.4. A divergencia időbeli változása, a divergenciaegyenlet

Egy-egy légréteg mozgása során megváltoztatja térfogatát, vagyis változik a divergenciája. Fontos tudni, hogy hol számíthatunk összeáramlásra, illetve szétáramlásra, ismernünk kell a divergenciamező fejlődését, időbeli változásait.

A nagyskálájú rendszerek fejlődésében szerepet játszó planetáris örvényesség, relatív örvényesség és a horizontális divergencia nagyságrendje rendre:

$$f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1} > \zeta \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1} > D \sim 10^{-6} \text{ s}^{-1},$$

míg ezek teljes időbeli megváltozása:

$$\frac{df}{dt} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2} \cong \frac{d\xi}{dt} = v \frac{\partial f}{\partial y} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2} > \frac{dD}{dt} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2}.$$

E három mennyiség közül a legkisebb a divergencia. Megjegyezzük, hogy a folyadékok hidrodinamikájában – az összenyomhatatlanság miatt – a divergencia kevésbé fontos, mint a légtörli folyamatok leírásában. Az örvényességi egyenlet analógiájára ismerkedjünk meg a horizontális divergencia időbeli változását megadó ún. divergenciaegyenlettel! Kiindulási egyenleteink a Descartes-rendszerben felírt horizontális mozgásegyenletek, ahol elhanyagoljuk a Coriolis-erő vertikális sebességtől függő részét:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} + F_x, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -fu - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} + F_y, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Deriváljuk az x -irányú mozgásegyenletet x , az y -irányú mozgásegyenletet y szerint. A két egyenlet összeadása, majd az egyenletek rendezése után:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\mathcal{D}}{\partial t} + u \frac{\mathcal{D}}{\partial x} + v \frac{\mathcal{D}}{\partial y} + w \frac{\mathcal{D}}{\partial z} = -u \frac{\mathcal{F}}{\partial y} + (f\xi - D^2) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) +$$

I Ia Ib Ic Id II III IV V

$$+ \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

VI VII VIII

Nézzük az egyes tagok jelentését! Az egyenlet bal oldala (I) megadja a horizontális divergencia teljes időbeli megváltozását, ami a lokális változásból (Ia), a horizontális divergencia advekcijából (Ib, Ic) és a konvekciós tagból (Id) áll. Nagyságuk:

$$\frac{\mathcal{D}}{\partial t} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2}, \quad \left(u \frac{\mathcal{D}}{\partial x} + v \frac{\mathcal{D}}{\partial y} \right) \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2}, \quad w \frac{\mathcal{D}}{\partial z} \sim 10^{-12} \text{ s}^{-2}.$$

E három tag közül a konvekciós tag (Id) a legkisebb.

A jobb oldal első négy tagja olyan hatásokat takar, amelyeket az örvényességi egyenletben is megfigyelhetünk. A tagok alakja azonban eltérő. A jobb oldal első tagja (II) a Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti megváltozását mutatja.

$$- u \frac{\mathcal{F}}{\partial y} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2},$$

ami ugyanolyan nagyságrendű, mint az örvényességi egyenletben. Formailag eltér egymástól az örvényességi és a divergenciaegyenletben szereplő ún. β tag. Az örvényességi egyenletben, az egyenlet jobb oldalára írt β tag:

$$- \frac{df}{dt} = -v \frac{\partial f}{\partial y} = -(\mathbf{v}_h \cdot \nabla f) ,$$

vagyis a horizontális sebesség és a Coriolis-paraméter gradiensének skaláris szorzata. A divergenciaegyenlet jobb oldalán szereplő tag pedig

$$- u \frac{\partial f}{\partial y} = (\mathbf{v}_h \times \nabla f) \cdot \mathbf{k} ,$$

vagyis a horizontális sebesség és a Coriolis-paraméter gradiensének vektoriális szorzata, tehát pont ellentétesen hat, mint az örvényességi egyenletben.

A divergenciaegyenlet jobb oldalának második tagja (III) a horizontális divergencia, valamint a relatív és a planetáris örvényesség hatását mutatja be a divergenciamező fejlődésében. E tag két részre bontható, a planetáris és a relatív örvényesség szorzatára:

$$f\zeta \sim 10^{-9} \text{ s}^{-2} ,$$

valamint a horizontális divergenciától függő összetevőre, ami általában három nagyságrenddel kisebb, mint az első összeadandó:

$$D^2 \sim 10^{-12} \text{ s}^{-2} .$$

A horizontális divergencia, a planetáris örvényesség és a relatív örvényesség hatása az örvényességi mező fejlődésére

$$- (f + \zeta)D$$

alakú volt.

A következő (IV) a forgatási csavarási tag, ami a vertikális szélnyírástól (a termikus szél hatása) és a vertikális sebességi mező horizontális inhomogenitásától függ; ezek skaláris szorzata. Nagyságrendje:

$$- \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2} .$$

A forgatási csavarási tag vektori alakban is felírható

$$- \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\nabla_h w \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} = -\frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \left[\text{rotv} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} \right) \mathbf{k} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \left[\text{rotv} \times \nabla_h w - (\nabla_h w \cdot \nabla_h w) \mathbf{k} \right] .$$

Az örvényességi egyenletben a forgatási csavarási tag szintén a vertikális szélnyírástól (a termikus széltől) és a vertikális sebességi mező horizontális inhomogenitásától függött; ezek vektoriális szorzata volt:

$$\frac{1}{2} \left(\mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} + \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \nabla_h w \right) = -\mathbf{k} \cdot \left(\nabla_h w \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} \right) = \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} \times \nabla_h w \right).$$

Tehát a forgatási csavarási tag a két egyenletben egymással ellentétesen viselkedik.

A szolenoidális tag (V) szintén megtalálható mindkét egyenletben. Az örvényesség és a divergencia definíciós egyenletéből és invariánskénti előállításából következően az egyik egyenletben egy vektorszorzat, a másik egyenletben (divergencia) pedig egy skalárszorzat alakjában tudjuk felírni. A szolenoidális tag nagyságrendje a divergenciaegyenletben:

$$- \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2},$$

vektori alakja:

$$- \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -\nabla_h \alpha \cdot \nabla_h p,$$

az örvényességi egyenletben pedig:

$$- \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\mathbf{k} \cdot (\nabla_h \alpha \times \nabla_h p).$$

Mindkét egyenletben szerepel súrlódási tag (VI); ugyanaz a nagyságrendjük is. A divergenciaegyenletben

$$+ \left(\frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial y} \right) < 10^{-10} \text{ s}^{-2}.$$

Itt a súrlódási tagot a horizontális nabla operátor felhasználásával, skalárszorzatként írjuk fel, míg az örvényességi egyenletben egy vektorszorzatként.

A divergenciaegyenlet utolsó két tagjának nincs megfelelője az örvényességi egyenletben. A (VII) tag a specifikus térfogat és a nyomás Laplace-operátorának a szorzata, vagyis arányos a geostrofikus örvényességgel.

$$- \alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \sim 10^{-9} \text{ s}^{-2}.$$

Az utolsó (VIII) tag a horizontális szélnyírás hatását tükrözi.

$$+ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2\mathbf{k} \cdot (\nabla u \times \nabla v) \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2}.$$

A nagyságrendi analízis kapcsán megjegyezzük, hogy a $-2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$ tag a

$$D^2 = \nabla_{\mathbf{v}_h} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_h} \sim 10^{-12} \text{s}^{-2}$$

tagban már szerepelt, de ellentétes előjellel. A horizontális divergencia becslésénél – mivel a divergencia négyzetére kaptunk kifejezést – nem az egyes összetevők nagyságrendje alapján számoltunk, hanem felhasználtuk annak karakterisztikus értékét ($D \sim 10^{-6} \text{s}^{-1}$). A fenti kifejezés becslésében más utat választottunk. Feltételeztük, hogy a sebességderiváltak kialakításában mind az örvénymentes, mind a divergencia mentes sebesség-összetevők részt vesznek.

A divergenciaegyenlet teljes alakjából kiindulva, a 10^{-10}s^{-2} -nál kisebb tagok elhanyagolása után kapjuk az – általánosan alkalmazott – ún. balanszegyenletet. Ez egy diagnosztikai egyenlet, ami azt mutatja, hogy a légköri folyamatokban első közelítésként elhanyagolható a horizontális divergencia időbeli változása.

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - f\zeta + \beta u - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0.$$

A négy tagból álló egyenletben két-két eltérő nagyságrendű tag van. A horizontális szélnyírásból származó tag a Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti változásával (β tag) azonos nagyságrendű (10^{-10}s^{-2}), míg a geostroikus örvényesség definíciós egyenletéből származó első két tag 10^{-9}s^{-2} nagyságrendű, vagyis a fenti diagnosztikai egyenlet még tovább egyszerűsíthető.

A diagnosztikai egyenletek alkalmazása mindig egy „igazodást” jelent a modellekben. A balanszegyenletben például a nyomási mező igazodik a horizontális áramlási és örvényességi mezőhöz. A

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - f\zeta = 0$$

egyszerűsített balanszegyenlet esetén pedig – ami nem más, mint a geostroikus örvényesség definíciós egyenlete – a nyomási mező igazodik – geostroikus feltételezés mellett – az örvényességi mezőhöz. Ez az ún. kvázigeostroikus közelítés. Minden időpillanatban teljesül a geostrofia.

Végezetül megadjuk a divergenciaegyenletet is nyomási koordináta-rendszerben. Az örvényességi egyenletnél használt horizontális mozgásegyenletekből indulunk ki. Az első egyenletet \mathcal{X} , a másodikat \mathcal{Y} szerint deriváljuk. Átalakítások után:

$$\frac{dD_p}{dt} = \frac{\partial D_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial D_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial D_p}{\partial y} + \omega \frac{\partial D_p}{\partial z} = -u_p \frac{\partial f}{\partial y} + (f\zeta_p - D_p^2) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u_p}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v_p}{\partial p} \right) +$$

I Ia Ib Ic II III IV

$$+ \left(\frac{\partial F_{px}}{\partial x} + \frac{\partial F_{py}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \frac{\partial v_p}{\partial y} - \frac{\partial u_p}{\partial y} \frac{\partial v_p}{\partial x} \right),$$

ahol D_p és ξ_p a horizontális divergencia és az örvényesség P -rendszerbeli alakja. Ahogy vártuk, a szolenoidális tag kivételével formailag megegyezik a P -rendszerbeli divergencia-egyenlet a Z -rendszerbelivel.

Természetesen más koordináta-rendszerekben, illetve más síkokra vonatkozóan is megadhatjuk a kétdimenziós divergenciaegyenletet, de általános alakban – a három mozgásegyenlet felhasználásával – is felírhatjuk a teljes divergencia időbeli megváltozását.

Megjegyezzük, hogy az örvényességi, a divergencia- és a termodinamikai egyenlet alkotja az ún. szűrt egyenletrendszer. A kifejezés arra utal, hogy a sebességmező helyett az örvényesség, a divergencia, illetve a nyomási mező (P -rendszerben a geopotenciál mező) változásait írjuk le. A szűrt egyenletrendszer örvényességi és divergenciaegyenlete a sebességpotenciál és az áramfüggvény bevezetésével, a horizontális sebességmező változásait leíró Navier-Stokes-egyenletekhez képes lényegesen több tagot tartalmaz. Lehetővé teszi a légköri folyamatok finomabb analizését. Ez a részletesebb analízis lehetősége, a mozgásformák „szűrése” adta az elnevezést. A szűrt egyenletrendszer felírásakor hidrosztatikus feltételezéssel élünk; általában nyomási rendszerben dolgozunk.

A szűrt egyenletrendszerrel történő számításokban olyan egyszerűsítéseket kell alkalmaznunk, amelyekben nem sérül a rendszerben az energiamegmaradás törvénye. Ezek a szűrt egyenletrendszer energiakonvizitens alakjai.