

XI. A vertikális koordinátázás kérdése

XI.1. A horizontális koordinátázás kérdése.....	3
XI.1.1. A gradiens, a divergencia és a rotácia alakja általános térképsík felett.....	4
XI.1.1.1. A gradiens, a divergencia és a rotáció alakja konform leképezés esetén.....	5
XI.1.2. A teljes derivált és a pályamenti teljes derivált alakja általános térképsík felett.....	6
XI.1.3. A teljes derivált és a pályamenti teljes derivált alakja konform leképezés esetén.....	7
XI.2. A kormányzóegyenletek felírása általánosított vertikális koordináta-rendszerben.....	11
XI.2.1. A két koordináta-rendszer közötti kapcsolat.....	12
XI.2.1.1. Időben változó skalár- és vektorterek.....	12
XI.2.1.2. A két rendszerbeli parciális differenciálhányadosok közötti kapcsolat.....	12
XI.2.1.3. A két koordináta-rendszerbeli sebességek.....	15
XI.2.1.4. A sebességek közötti kapcsolat.....	16
XI.2.1.5. A teljes deriváltak.....	18
XI.2.1.6. A divergencia alakja.....	19
XI.2.2. A hidro-termodinamikai egyenletrendszer alakja az (x_1, y_1, ζ, t_1) rendszerben.....	20
XI.2.2.1. A mozgásegyenletek átírása.....	21
XI.2.2.2. A kontinuitási egyenlet.....	22
XI.2.2.3. A termodinamikai egyenlet.....	24
XI.2.2.4. A nedvességszállítási egyenlet.....	24
XI.2.2.5. Az állapotegyenlet.....	24
XI.3. A felszínkövető, a nyomási, a tömeg- és a potenciális hőmérsékleti koordináta-rendszer.....	25
XI.3.1. A felszínkövető (z^*) koordináta-rendszer.....	25
XI.3.2. A nyomási koordináta-rendszer.....	31
XI.3.3. A tömegkoordináta-rendszer.....	33
XI.3.4. Az izentrop koordináta-rendszer.....	36
XI.4. A szigma-, az eta és a vegyes koordináta-rendszerek.....	39
XI.4.1. A Phillips-féle σ -koordináta-rendszer.....	40
XI.4.2. Az η -koordináta-rendszer.....	44
XI.4.2.1. A kormányzóegyenletek alakja az η -rendszerben.....	46
XI.4.3. Hibrid koordináta-rendszerek.....	47
XI.5. Alkalmazások.....	49
XI.5.1. A horizontális koordinátázás néhány kérdése.....	50
XI.5.2. További magassági koordinátázások.....	52
XI.5.3. Az Exner-függvény.....	52

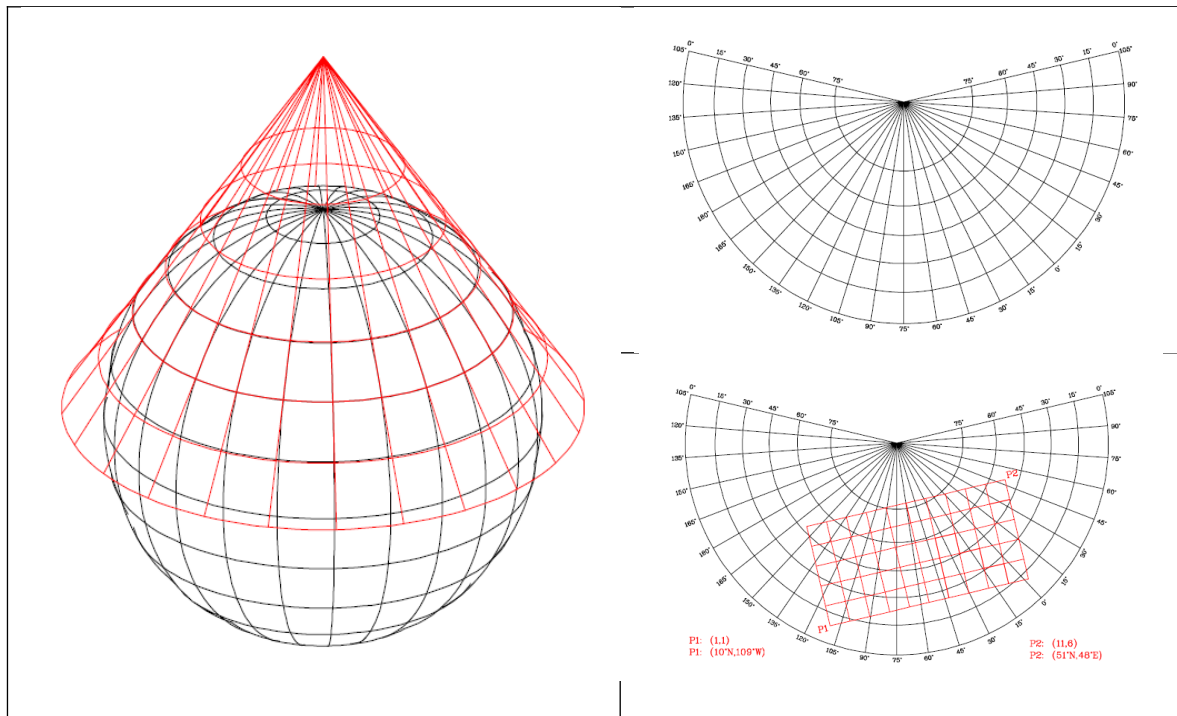
XI.5.4. A leggyakrabban használt vertikális koordinátázások (σ , η , Θ , hibrid) összehasonlítása.....	53
XI.5.4.1. A z- és a p-rendszer korlátai.....	54
XI.5.4.2. A σ -rendszer.....	54
XI.5.4.3. Az η -rendszer.....	54
XI.5.4.4. A Θ -rendszer.....	55
XI.5.4.5. Hibrid koordináta-rendszerek.....	55
XI.5.4.6. Összefoglaló megjegyzések.....	56

A szférikus és a Descartes-féle koordináta-rendszerben felírt hidro-termodinamikai egyenletrendszer alkalmazásakor lényeges, hogy a feladat jellegének megfelelő vertikális koordinátát válasszunk. Ha egy akadály körüli áramlást tanulmányozunk, célszerű felszínkövető rendszert használni. A magassági térképek nyomási koordináta-rendszerben készülnek. Szintén ezt a rendszert alkalmazzák a repülésmeteorológiában. Frontanalízishez vagy trajektóriaszámításhoz hasznos a potenciális hőmérsékleti koordinátázás bevezetése. Lényegesen leegyszerűsíti a légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer kezdeti- és peremfeltételeinek a megadását, ha a végtelen kiterjedésű légkört leképezzük egy egységnyi vastagságú rétegbe (pl. az ún. szigma-koordinátázást használva). A határrétegben gyakran alkalmazzák a magasság logaritmus szerint változó koordinátázást. Ismertek az ún. hibrid-koordináta-rendszerek is, amelyek a légkör egy véges vastagságú rétegét képezik le az [1, 0] intervallumba.

A vertikális koordinátázás mellett fontos a megfelelő horizontális koordináta-rendszer megválasztása. Gondoljunk csak a térképsíkra, amikor a geoid alakú Föld egy korlátos tartományát a síkra képezzük – majd ezen a síkon most már Descartes-féle koordináta-rendszert használva, ami egy következő transzformáció – oldjuk meg az előrejelzési feladatot. Különböző valós és képzetes térképvetületek vannak. A kettős transzformációt az 1. ábra szemlélteti.

A fejezet első részében a horizontális koordináta-transzformáció általános elveivel foglalkozunk, majd bemutatjuk a légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer általános alakját térképsík felett. Itt a transzformáció elveivel foglalkozunk. Ezt követően áttérünk a vertikális koordinátázás kérdésére. Bemutatjuk a Descartes-féle koordináta-rendszerben felírt egyenletrendszer általános alakját tetszőleges vertikális koordináta-rendszerben. Az egyszerűség kedvéért elhanyagoljuk a nehézségi gyorsulás magasság és szélességi kör szerinti változását. Feltételezzük, hogy a gravitációs erő mindenütt függőleges. Az ún. potenciál közelítést alkalmazzuk. Nem foglalkozunk a molekuláris viszkozitási erő átírásával sem.

A fejezet végén sorra vesszük a leggyakrabban használt vertikális koordinátázásokat, megadjuk a légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer alakját, s kitérünk az alkalmazásokra is.



1. ábra. A Föld felszínének vetítése Lambert-féle kúpvetületre, e vetület síkbeli kiterítése, majd egy ekvidisztáns rácshálózat (Descartes-féle koordináta-rendszer) megadása (Taylor, 1997 alapján).

XI.1. A horizontális koordinátázás kérdése

Tekintsünk egy korlátos előrejelzési tartományt! A szférikus rendszerből áttérhetünk térképsík feletti koordináta-rendszerre. Ez már egy Descartes-féle rendszer, ahol egyszerűbbé válik az egyenletek véges különbséges megoldása ekvidisztáns rácshálózat alkalmazásával. Hasonló kérdés merül fel, ha egy szabálytalan térrészben szeretnénk leírni az áramlási mezőt, vagy ha egy térben változó felbontású rácson dolgozunk, pl. egy szennyezőanyag forrástól távolodva egyre durvább felbontással számolunk. Ekkor is célszerű egy újabb transzformáció után ekvidisztáns rácshálózatot dolgozni.

Maradjunk a térképsík felett! Tudjuk, hogy egy gömbfelületet nem lehet úgy leképezni a síkra, hogy egyszerre szög- és területtartó legyen. A meteorológiai gyakorlatban szögtartó, vagy konformis térképvetületekkel dolgozunk. A szögtartó térképező leképezés sajátja, hogy a térkép adott pontbeli torzítása (m) nem irányfüggő. Természetesen a torzítás értéke helyről helyre változhat. A leggyakrabban használt valós vetületek a polársztereografikus, a Mercator-féle hengervetület és a Lambert-féle kúpvetület, amelyek az alkotóikról kapták a nevüket: Gerardus Mercator (1512–1594), flamand térképészről és Johann Heinrich Lambert (1728–1777), svájci csillagász, matematikus, fizikusról.

A légköri hidrodinamikai egyenlet térképsíkfeletti felírásának általános elveivel foglalkozunk. A térképvetületi koordináta-rendszerek matematikai leírásáról, a térképvetületek torzításaival, a térképezési leképezések matematikai alapjairól többek között

Haltiner és Williams (1980), Práger (1982), Stegena (1988) és Taylor (1997) munkáiban olvashatunk. A pólusok kérdésével a meteorológiai modellekben (az Északi-sarkon minden irány déli) többek között Bentsen et al. (1999) foglalkozott.

Tekintsük a térképsík feletti görbevonalú ortogonális koordináta rendszert (x, y, z) . A térképsíkon haladva a horizontális, egymásra merőleges egységvektorok iránya – a térképvetülettől függően – helyről helyre változik. Az elemi elmozdulások:

$$d\mathbf{x}_T, d\mathbf{y}_T, d\mathbf{z}_T.$$

Ha a térképsík felett Descartes-féle koordináta-rendszerben szeretnénk dolgozni, akkor a térképsík feletti görbevonalú ortogonális rendszer egységvektorait helyről helyre (az alkalmazott vetülettől függően) más-más szöggel el kell forgatnunk. Egy újabb transzformációt kell végrehajtani az egyenleteken. E feladattal itt nem foglalkozunk, a forgatás mátrixát, majd a transzformációt korábbi tanulmányaink alapján fel tudjuk írni.

A térképvetületen történő elmozdulások alapján megadhatjuk a „fizikai térben” (a mi esetünkben a szférikus koordináta-rendszerben) történő elemi elmozdulásokat és sebességkomponenseket:

$$d\mathbf{x}_s = \mathbf{i}_s \cdot dx_s = h_1 \cdot d\mathbf{x}_T, \quad d\mathbf{y}_s = \mathbf{j}_s \cdot dy_s = h_2 \cdot d\mathbf{y}_T, \quad d\mathbf{z}_s = \mathbf{k}_s \cdot dz_s = h_3 \cdot d\mathbf{z}_T,$$

ahol h_1, h_2, h_3 a megfelelő koordináta-irányok szerinti vetületi arány. Az egyes sebességkomponensek átirása:

$$u_s = h_1 \cdot u_T, \quad v_s = h_2 \cdot v_T, \quad w_s = h_3 \cdot w_T.$$

Indexes jelölést használva:

$$\mathbf{v}_s = v_{si} = h_i \cdot v_{Ti}.$$

A vetületi arány (h_i) reciproka az egyes irányok szerinti torzítás (m_i). A torzítás segítségével a szférikus rendszerből a térképsík feletti rendszerbe térhetünk át. Egy tértranszformációt hajtottunk végre (1. ábra). Más lett az elemi elmozdulás, felület és térfogat is. Nézzük meg az invariánsok, a gradiens, a divergencia és a rotáció alakját a két rendszerben!

XI.1.1. A gradiens, a divergencia és a rotácia alakja általános térképsík felett

A nyomási gradiens alakja:

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_s} \mathbf{i}_s + \frac{\partial p}{\partial y_s} \mathbf{j}_s + \frac{\partial p}{\partial z_s} \mathbf{k}_s \right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x_T} \frac{\mathbf{i}_{s_T}}{h_1} + \frac{\partial p}{\partial y_T} \frac{\mathbf{j}_{s_T}}{h_2} + \frac{\partial p}{\partial z_T} \frac{\mathbf{k}_{s_T}}{h_3} \right),$$

ahol $(\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{k}_s)$ ortogonális egységvektor hármas a szférikus rendszerben, míg $(\mathbf{i}_{s_T}, \mathbf{j}_{s_T}, \mathbf{k}_{s_T})$ a térképsík felett, ahol $\mathbf{k}_{s_T} \equiv \mathbf{k}$ a függőleges irányú egységvektor. Az $\mathbf{i}_{s_T}, \mathbf{j}_{s_T}$ ortogonális egységvektorok irányítottága helyről helyre változik a vetítéstől függően, de \mathbf{i}_{s_T} a térképsíkon is a keleti irányt, míg \mathbf{j}_{s_T} az északi irányt mutatja az északi, a déli irányt a déli

féltekén. Megjegyezzük, hogy ebben a rendszerben a két pólust nem tudjuk kezelni (vesd össze a különböző térképvetületek alakját). Emlékeztetünk, hogy a szférikus rendszerben:

$$dx_s = r \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda, \quad dy_s = r \cdot d\varphi, \quad dz_s = dr.$$

A divergencia új alakját az integrál invariáns előállítására alapján kapjuk (*ne feledjük, hogy egy térképsík, nem pedig egy gömb, vagy geoid felett dolgozunk*):

$$\nabla \mathbf{v}_s = \left(\frac{1}{dy_s \cdot dz_s} \frac{\partial(u_s \cdot dy_s \cdot dz_s)}{\partial x_s} + \frac{1}{dz_s \cdot dx_s} \frac{\partial(v_s \cdot dz_s \cdot dx_s)}{\partial y_s} + \frac{1}{dx_s \cdot dy_s} \frac{\partial(w_s \cdot dx_s \cdot dy_s)}{\partial z_s} \right) = \frac{1}{L} \frac{\partial(L \cdot u_T)}{\partial x_T}$$

ahol $L = l_i = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$, illetve $u_{si} = l_i \cdot u_{Ti}$ és $dx_{si} = m_i \cdot dx_{Ti}$. A térképsík felett teljesül, hogy

$$\frac{\partial dx_T}{\partial y_T} = \frac{\partial dy_T}{\partial x_T} = 0.$$

A rotációvektor alakja:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v}_s &= \mathbf{i}_s \left(\frac{1}{dz_s} \frac{\partial(w_s \cdot dz_s)}{\partial y_s} - \frac{1}{dy_s} \frac{\partial(v_s \cdot dy_s)}{\partial z_s} \right) + \mathbf{j}_s \left(\frac{1}{dx_s} \frac{\partial(u_s \cdot dx_s)}{\partial z_s} - \frac{1}{dz_s} \frac{\partial(w_s \cdot dz_s)}{\partial x_s} \right) + \mathbf{k}_s \left(\frac{1}{dy_s} \frac{\partial(v_s \cdot dy_s)}{\partial x_s} - \frac{1}{dx_s} \frac{\partial(u_s \cdot dx_s)}{\partial y_s} \right) \\ &= \frac{\mathbf{i}_{s_T}}{h_2 \cdot h_3} \left(\frac{\partial(w_T \cdot h_3^2)}{\partial y_T} - \frac{\partial(v_T \cdot h_2^2)}{\partial z_T} \right) + \frac{\mathbf{j}_{s_T}}{h_3 \cdot h_1} \left(\frac{\partial(u_T \cdot h_1^2)}{\partial z_T} - \frac{\partial(w_T \cdot h_3^2)}{\partial x_T} \right) + \frac{\mathbf{k}_{s_T}}{h_1 \cdot h_2} \left(\frac{\partial(v_T \cdot h_2^2)}{\partial x_T} - \frac{\partial(u_T \cdot h_1^2)}{\partial y_T} \right) \end{aligned}$$

Ha konform szögtartó leképezést használunk a térképsík felett, akkor a vetületi arány irány független:

$$h_1 = h_2 = \sigma(x_T, y_T, z_T) = \sigma_0(x_T, y_T) \cdot r / r_F \quad \text{és} \quad h_3 = 1.$$

A meteorológiai gyakorlatban ilyen leképezésekkel dolgozunk. $\sigma_0(x_T, y_T)$ a vetületi arány a Föld felszínén a térképvetület (x_T, y_T) pontjában, $r / r_F = 1 + z / r_F$ jelenti az ívelem változását a magassággal, r_F a Föld sugara, ami geoid alakú Föld esetén a hosszúsági kör függvénye.

XI.1.1.1. A gradiens, a divergencia és a rotáció alakja konform leképezés esetén

Nézzük meg hogyan egyszerűsödnek a fenti invariáns mennyiségek egy konform térképező leképezés esetén:

$$\nabla p = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial x_T} \mathbf{i}_{s_T} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p}{\partial y_T} \mathbf{j}_{s_T} + \frac{\partial p}{\partial z_T} \mathbf{k}_{s_T},$$

$$\nabla \mathbf{v}_s = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial(u_s \cdot \sigma)}{\partial x_s} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial(v_s \cdot \sigma)}{\partial y_s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(w_s \cdot r^2)}{\partial z_s} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial(u_T \cdot \sigma^2)}{\partial x_T} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial(v_T \cdot \sigma^2)}{\partial y_T} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(w_T \cdot r^2)}{\partial z_T} =$$

$$= \frac{\partial u_T}{\partial x_T} + \frac{\partial v_T}{\partial y_T} + \frac{\partial w_T}{\partial z_T} + 2 \cdot u_T \cdot G_{x_T} + 2 \cdot v_T \cdot G_{y_T} + \frac{2w}{r},$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v}_s &= \mathbf{i}_{s_T} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial w_T}{\partial y_T} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial (v_T \cdot \sigma^2)}{\partial z_T} \right) + \mathbf{j}_{s_T} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial (u_T \cdot \sigma^2)}{\partial z_T} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial w_T}{\partial x_T} \right) + \mathbf{k}_{s_T} \left(\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial (v_T \cdot \sigma^2)}{\partial x_T} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial (u_T \cdot \sigma^2)}{\partial y_T} \right) = \\ &= \mathbf{i}_{s_T} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial w_T}{\partial y_T} - \sigma \frac{\partial v_T}{\partial z_T} - 2\sigma v_T \frac{z}{r} \right) + \mathbf{j}_{s_T} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial (u_T \cdot \sigma^2)}{\partial z_T} + 2\sigma u_T \frac{z}{r} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial w_T}{\partial x_T} \right) + \\ &+ \mathbf{k}_{s_T} \left(\frac{\partial v_T}{\partial x_T} - \frac{\partial u_T}{\partial y_T} + v_T G_{x_T} - u_T G_{y_T} \right), \end{aligned}$$

ahol $G_{x_T} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0(x_T, y_T)}{\partial x_T}$, $G_{y_T} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0(x_T, y_T)}{\partial y_T}$ a belső görbületi vektor két komponense, ami megmutatja, hogy a térképsíkon rajzolt egyenes milyen görbülettel rendelkezik a Földön.

XI.1.2. A teljes derivált és a pályamenti teljes derivált alakja általános térképsík felett

Könnyen megadhatjuk a teljes derivált alakját is a két rendszerben:

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_s = \frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{\partial}{\partial x_s} + v_s \frac{\partial}{\partial y_s} + w_s \frac{\partial}{\partial z_s} = \frac{\partial}{\partial t} + u_T \frac{\partial}{\partial x_T} + v_T \frac{\partial}{\partial y_T} + w_T \frac{\partial}{\partial z_T} = \left(\frac{d}{dt} \right)_T.$$

Az ortogonális görbevonalú koordináta-rendszerben sodródó légrézsz egységvektorai változnak a mozgás során. Változik az elemi térfogat is. Hogyan kell ezt a hatást figyelembe venni a Navier-Stokes-egyenletek átírásánál? Az egyenlet általános vektoriális alakja a légpálya menti teljes derivált (D/Dt) felhasználásával:

$$\frac{D \mathbf{v}_s}{D t} + \frac{1}{\rho} \nabla p + 2\Omega \mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_s + g \cdot \mathbf{k}_s = 0,$$

A \mathbf{e}_n egységnyi hosszúságú vektor megadja a földforgási szögsebesség irányát az általunk használt koordináta-rendszerben. Ennek alakja:

$$\mathbf{e}_n = N_{x_s} \mathbf{i}_s + N_{y_s} \mathbf{j}_s + N_{z_s} \mathbf{k}_s$$

A Coriolis-paraméter alakja: $f = 2\Omega N_{z_s}$, N_{x_s} , N_{y_s} a földforgás szögsebességvektorának horizontális koordináták irányába eső vetületét jelenti: $N_{x_s} = 0$, $N_{y_s} = \cos \varphi$, ahol φ a földrajzi szélesség - szférikus rendszerben dolgozunk. Egy légrézszecske mozgását vizsgáljuk. A mozgásegyenlet fenti alakja Lagrange-rendszerben van felírva. A légrézsz mozgása során

változik az egységvektorok iránya, ami az abszolút rendszerből nézve egy adaléktagot jelent a gyorsulás felírásában.

$$\frac{D \mathbf{v}_s}{D t} = \frac{\partial u_{si}}{\partial t} + u_{sj} \frac{\partial u_{si}}{\partial x_{sj}} + \Gamma_{ij}^k u_{sj} \cdot u_{sk}$$

Az első két tag a sebesség teljes időbeli megváltozása $\frac{d \mathbf{v}_s}{d t} = \frac{d v_{si}}{d t} = \frac{\partial u_{si}}{\partial t} + u_{sj} \frac{\partial u_{si}}{\partial x_{sj}}$, a harmadik tag foglalja magába az ún. metrikus gyorsulási tagokat, vagyis a koordináta-rendszer görbületéből származó hatást (a pálya menti mozgás során), ami matematikailag a Γ_{ij}^k másodrendű Christoffel-szimbólum – változik az elemi térfogat. Nézzük meg általános esetben, hogy transzformálódik a $\frac{D \mathbf{v}_s}{D t}$ kifejezés!

$$\begin{aligned} \frac{D \mathbf{v}_s}{D t} &= \frac{D v_{si}}{D t} = \frac{d v_{si}}{d t} + \sum_{j \neq i} v_{Tj} \left(v_{si} \frac{\partial \ln h_i}{\partial x_{sj}} - v_{sj} \frac{\partial \ln h_j}{\partial x_{si}} \right) = \frac{d h_i \cdot v_{Ti}}{d t} + \sum_{j \neq i} v_{Tj} \left(v_{Ti} \frac{\partial h_i}{\partial x_{Tj}} - v_{Tj} \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_{Ti}} \right) = \\ &= h_i \frac{d v_{Ti}}{d t} + v_{Ti} \frac{d h_i}{d t} + \sum_{j \neq i} v_{Tj} \left(v_{Ti} \frac{\partial h_i}{\partial x_{Tj}} - v_{Tj} \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_{Ti}} \right) = h_i \frac{d v_{Ti}}{d t} + v_{Ti} \left(v_{Tj} \frac{\partial h_i}{\partial x_{Tj}} \right) + \sum_{j \neq i} v_{Tj} \left(v_{Ti} \frac{\partial h_i}{\partial x_{Tj}} - v_{Tj} \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_{Ti}} \right) = \\ &= h_i \left[\frac{d v_{Ti}}{d t} + v_{Ti} \left(v_{Tj} \frac{\partial \ln h_i}{\partial x_{Tj}} \right) + \sum_{j \neq i} v_{Tj} \left(v_{Ti} \frac{\partial \ln h_i}{\partial x_{Tj}} - v_{Tj} \frac{h_j^2}{h_i^2} \frac{\partial \ln h_j}{\partial x_{Ti}} \right) \right] \end{aligned}$$

XI.1.3. A teljes derivált és a pályamenti teljes derivált alakja konform leképezés esetén

Következő lépésként a térképsík feletti transzformációt elemezzük. Emlékeztetünk, hogy szögtartó, konform leképezések esetén $h_1 = h_2 = \sigma(x_T, y_T, z_T) = \sigma_0(x_T, y_T) \cdot r / r_F$ és $h_3 = 1$. A pályamenti teljes derivált alakja a fenti kifejezés felhasználásával komponensenként:

$$\frac{D u_s}{D t} = \frac{d u_s}{d t} + v_s \left(\frac{u_s}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial y_s} - \frac{v_s}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_s} \right) + \frac{w_s \cdot u_s}{r},$$

$$\frac{D v_s}{D t} = \frac{d v_s}{d t} + u_s \left(\frac{v_s}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_s} - \frac{u_s}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial y_s} \right) + \frac{w_s \cdot v_s}{r},$$

$$\frac{D w_s}{D t} = \frac{d w_s}{d t} - \frac{u_s^2 + v_s^2}{r}.$$

Nézzük először a teljes deriváltak átrását (a jobb oldalak első tagja). Kihasználtuk, hogy $\sigma(x_T, y_T, z_T) = \sigma_0(x_T, y_T) \cdot r / r_F$ és

$$\frac{d u_s}{d t} = \frac{d \sigma u_T}{d t} = \sigma \frac{d u_T}{d t} + u_T \frac{d \sigma}{d t} = \sigma \frac{d u_T}{d t} + u_T \frac{r}{r_F} \left(u_T \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_T} + v_T \frac{\partial \sigma_0}{\partial y_T} \right) + u_T \frac{w_T \sigma_0}{r_F}$$

$$\frac{d v_s}{d t} = \frac{d \sigma v_T}{d t} = \sigma \frac{d v_T}{d t} + v_T \frac{d \sigma}{d t} = \sigma \frac{d v_T}{d t} + v_T \frac{r}{r_F} \left(u_T \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_T} + v_T \frac{\partial \sigma_0}{\partial y_T} \right) + v_T \frac{w_T \sigma_0}{r_F}$$

$$\frac{d w_s}{d t} = \frac{d w_T}{d t}$$

Bevezetve a $\mathbf{v}_{hT} = (\mathbf{i}_{s_T} u_T + \mathbf{j}_{s_T} v_T)$ tétképsík feletti horizontális sebességvektort és a vetületi arány gradiensét $\nabla_{hT} \sigma_0 = (\mathbf{i}_{s_T} \partial \sigma_0 / \partial x_T + \mathbf{j}_{s_T} \partial \sigma_0 / \partial y_T)$, a hármasszorzás szabályai alapján kapjuk, hogy:

$$0 = \mathbf{v}_{hT} \times (\mathbf{v}_{hT} \times \nabla_{hT} \sigma_0) = \mathbf{v}_{hT} (\mathbf{v}_{hT} \cdot \nabla_{hT} \sigma_0) - \nabla_{hT} \sigma_0 \cdot (\mathbf{v}_{hT} \cdot \mathbf{v}_{hT}),$$

vagyis

$$\nabla_{hT} \sigma_0 \cdot (\mathbf{v}_{hT} \cdot \mathbf{v}_{hT}) = \mathbf{v}_{hT} (\mathbf{v}_{hT} \cdot \nabla_{hT} \sigma_0).$$

A teljes deriváltak alakja is tovább egyszerűsödik:

$$\frac{d u_s}{d t} = \sigma \frac{d u_T}{d t} + \frac{r}{r_F} (u_{hT}^2 + v_{hT}^2) \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_T} + u_T \frac{w_T \sigma_0}{r_F} = \sigma \left(\frac{d u_T}{d t} + (u_{hT}^2 + v_{hT}^2) G_{x_T} + \frac{u_T w_T}{r} \right),$$

$$\frac{d v_s}{d t} = \sigma \frac{d v_T}{d t} + \frac{r}{r_F} (u_{hT}^2 + v_{hT}^2) \frac{\partial \sigma_0}{\partial y_T} + v_T \frac{w_T \sigma_0}{r_F} = \sigma \left(\frac{d v_T}{d t} + (u_{hT}^2 + v_{hT}^2) G_{y_T} + \frac{v_T w_T}{r} \right),$$

$$\frac{d w_s}{d t} = \frac{d w_T}{d t}.$$

A szférikus és a térképsík feletti sebességek átírása alapján:

$$\frac{D u_s}{D t} = \sigma \left(\frac{d v_T}{d t} + \left((u_{hT}^2 + v_{hT}^2) G_{y_T} + \frac{v_T \cdot w_T}{r} \right) + v_T (u_T \cdot G_{y_T} - v_T \cdot G_{x_T}) + \frac{w_T \cdot u_T}{r} \right),$$

$$\frac{D v_s}{D t} = \sigma \left(\frac{d v_T}{d t} + \left((u_{hT}^2 + v_{hT}^2) G_{y_T} + \frac{v_T \cdot w_T}{r} \right) + u_T (v_T \cdot G_{y_T} - u_T \cdot G_{x_T}) + \frac{v_T \cdot w_T}{r} \right),$$

$$\frac{D w_s}{D t} = \frac{d w_T}{d t} - \sigma^2 \frac{u_T^2 + v_T^2}{r}.$$

A fenti összefüggések felhasználásával már átírhatjuk a szférikus rendszerbeli légköri hidrodinamikai egyenletrendszer térképsík feletti. A Navier-Stokes-egyenletek átírásához meg kell adnunk az egyenlet bal oldalán szereplő tagok (nyomási gradiens erő, Coriolis-erő és a nehézségi erő új alakját. Kihhasználva a gradiens invariáns voltát, illetve a vektorszorzat transzformációját:

A nyomási gradiens erő alakja:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{i}_{s_T} \frac{\partial p}{\partial x_T} + \mathbf{j}_{s_T} \frac{\partial p}{\partial y_T} + \mathbf{k}_{s_T} \frac{\partial p}{\partial z_T}.$$

A Coriolis-erő alakja a térképsíkon, amit „ráhelyezünk a Földre”:

$$2\Omega \cdot \mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_s = \mathbf{i}_{s_T} \cdot 2\Omega (N_{y_T} \cdot w_T - N_{z_T} \cdot v_T) + \mathbf{j}_{s_T} \cdot 2\Omega (N_{z_T} \cdot u_T - N_{x_T} \cdot w_T) + \mathbf{k}_{s_T} \cdot 2\Omega (N_{x_T} \cdot v_T - N_{y_T} \cdot u_T)$$

A magasság mint függőleges koordináta nem változik. A Coriolis-paraméter alakja: $f = 2\Omega N_{z_T}$, N_{x_T} , N_{y_T} a földforgás szögsebességvektorának a horizontális koordináták irányába eső vetületét jelenti a térképsíkon. Ha pl. a Mercator (henger) -vetületen dolgozunk, akkor: $N_{x_T} = 0$, $N_{y_T} = 1$, hiszen ilyenkor a \mathbf{j}_{s_T} egységvektor minden esetben párhuzamos a szögsebességvektorral a hengerpaláston, s ezt terütjük ki a síkra.

Az „asztalra kiterített térképsíkon” nem változik a helyi függőleges jelentése, így a gravitációs erő sem:

$$g \cdot \mathbf{k}_s = g \cdot \mathbf{k}_{s_T} \equiv g \cdot \mathbf{k}.$$

A Navier-Stokes-egyenletek alakja az új térképsík feletti koordináta-rendszerben komponensenként felírva:

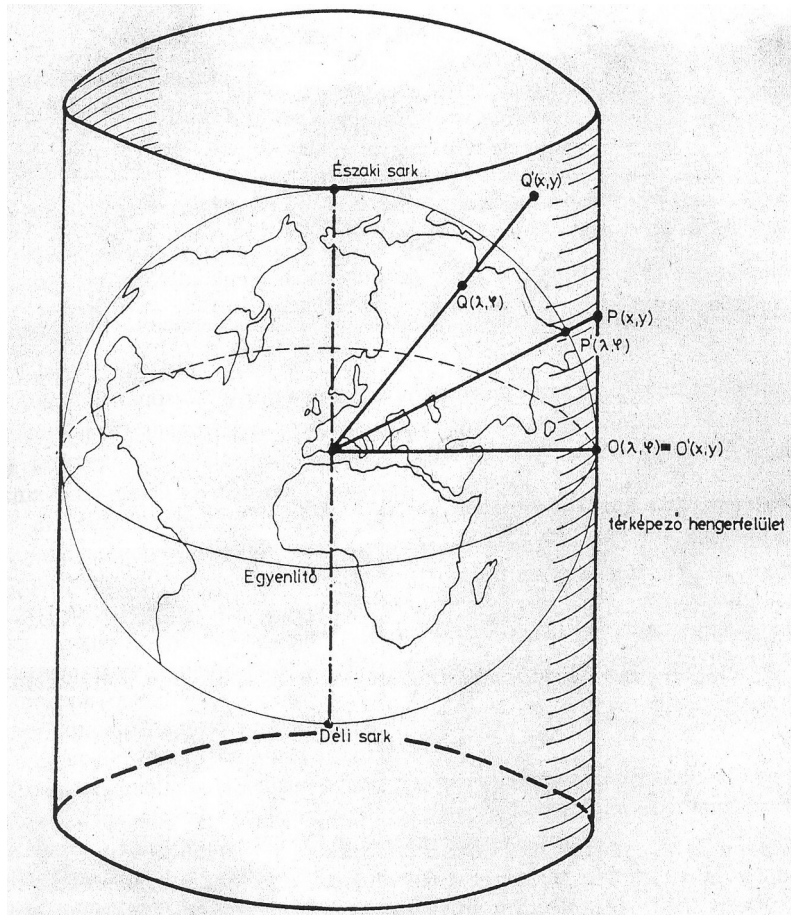
$$\frac{d v_T}{dt} + \left((u_{hT}^2 + v_{hT}^2) G_{y_T} + \frac{v_T \cdot w_T}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\sigma^2 \partial x_T} - \left(\frac{1}{\sigma} 2\Omega N_{y_T} \cdot w_T - f \cdot v_T \right) - v_T (u_T \cdot G_{y_T} - v_T \cdot G_{x_T}) - \frac{w_T \cdot u_T}{r}$$

,

$$\frac{d v_T}{dt} + \left((u_{hT}^2 + v_{hT}^2) G_{y_T} + \frac{v_T \cdot w_T}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\sigma^2 \partial y_T} - \left(f \cdot u_T - \frac{1}{\sigma} 2\Omega N_{x_T} \cdot w_T \right) - u_T (v_T \cdot G_{y_T} - u_T \cdot G_{x_T}) - \frac{v_T \cdot w_T}{r}$$

,

$$\frac{1}{\sigma^2} \frac{d w_T}{dt} = - \frac{\partial p}{\sigma^2 \partial z_T} - \frac{1}{\sigma^2} g - \left(\frac{1}{\sigma} 2\Omega N_{x_T} \cdot v_T - \frac{1}{\sigma} 2\Omega N_{y_T} \cdot u_T \right) + \frac{u_T^2 + v_T^2}{r}.$$



2. ábra. Mercator-féle térképvetület.

Az egyenletek bal oldalának első tagja a térképsík feletti sebesség teljes időbeli változása, a második tag pedig a szférikus rendszer és a térképsík feletti kordináta-rendszer közötti áttérés hatását adja meg, ami a két rendszerbeli sebesség ($\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_T$) és az elemi térfogatok közötti különbségből fakad. A jobb oldalon látjuk a nyomási gradiens erő, a gravitációs erő (3. mozgásegyenletben), a Coriolis-erő és a görbevonalú koordináta-rendszerben a pályamenti térfogatváltozásból és a koordináta-rendszerek közötti áttérésekből származó tagokat. Ezek kényszererők, amit könnyen beláthatunk, ha megnézzük, hogy történik-e munkavégzés

Az egyenlet alkalmazásához meg kell adnunk a képletekben szereplő paramétereket, ami a térképvetület függvénye.

A divergencia ismeretében könnyen megadhatjuk a kontinuitási egyenlet alakját:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}_s) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial(u_T \cdot \rho \cdot \sigma^2)}{\partial x_T} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial(v_T \cdot \rho \cdot \sigma^2)}{\partial y_T} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(w_T \cdot \rho \cdot r^2)}{\partial z_T} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_T)}{\partial x_T} + \frac{\partial(\rho \cdot v_T)}{\partial y_T} + \frac{\partial(w_T \cdot \rho)}{\partial z_T} + 2 \cdot \rho(u_T \cdot G_{x_T} + v_T \cdot G_{y_T}) + \frac{2 \cdot \rho \cdot w}{r}. \end{aligned}$$

A termodinamikai, a nedvességszállítási és az állapotegyenlet alakja nem változik:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} \frac{dQ}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt}, \quad \frac{p}{\rho} = RT .$$

ahol

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_T \frac{\partial}{\partial x_T} + v_T \frac{\partial}{\partial y_T} + w_T \frac{\partial}{\partial z_T} .$$

XI.2. A kormányzóegyenletek felírása általánosított vertikális koordináta-rendszerben

Az előző részben áttekintettük a szférikus koordináta-rendszerből a térképsík fölé történő transzformációt. Az így kapott görbevonalú ortogonális koordináta-rendszer egységvektorai a térképsík különböző pontjaiban más-más irányúak (természetesen a függőleges irány nem változik.) Egy helyről helyre változó forgatási operátorral térünk át a Descartes-féle koordináta-rendszerbe, ahol az egységvektorok helyzete már nem változik.

E részben a vertikális koordinázás kérdésével foglalkozunk. Descartes-féle koordináta-rendszerben dolgozunk. Arra törekszünk, hogy minél általánosabban vezessük le a légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer alakját az új rendszerben. Legyen adott az

$$(x, y, z, t)$$

Descartes-féle koordináta-rendszer. Jelölje az új koordináta-rendszert az (1) index, melynek független koordinátái rendre

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) .$$

Számunkra a vertikális koordinázás a fontos. Ezt kiemelendő vezessük be a

$$z_1 = \zeta$$

jelölést. Az áttérés feltétele, hogy a Descartes-féle és az új koordináta-rendszer között bijektív kapcsolat, azaz egy-egy értelmű megfeleltetés legyen. Ez az új rendszer – a vertikális koordinátázástól függően – vagy megengedi a vertikális gyorsulásokat, azaz a nem-hidrosztatikus közelítést (pl. a felszínkövető rendszer), vagy megköveteli a hidrosztatikus légkör feltételezését (pl. a potenciális hőmérsékleti rendszer). Az áttérés során nem változnak sem a horizontális térkoordináták, sem az idő. Nem változik a helyi függőleges irány sem, csak most nem a magasság, hanem a ζ szerint haladunk.

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad t_1 = t .$$

XI.2.1. A két koordináta-rendszer közötti kapcsolat

XI.2.1.1. Időben változó skalár- és vektorterek

Ha adott egy $p(x, y, z, t)$, illetve $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ időben változó skalár- illetve vektortér, akkor felírható, hogy

$$p(x, y, z, t) \equiv p(x_1(x, y, z, t), y_1(x, y, z, t), \zeta(x, y, z, t), t_1(x, y, z, t)) = p_1(x_1, y_1, \zeta, t_1),$$

A skalárok értéke nem változik az áttérés során. A koordináta-rendszerek közötti bijekció alapján megadhatunk egy tetszőleges vektort is a másik koordináta-rendszer független változóival. Természetesen ennek a vektornak sem változik a nagysága és a térbeli helyzete.

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) \equiv \mathbf{v}(x_1(x, y, z, t), y_1(x, y, z, t), \zeta(x, y, z, t), t_1(x, y, z, t)).$$

A vektorok jelentése azonban függ a koordináta-rendszer választásától, gondoljunk csak a sebességvektor definíciójára. Vegyük a nyomási rendszert. Itt a vertikális sebesség definíciója nem más, mint a vertikális koordináta irányába történő elmozdulás teljes időbeli deriváltja: $\frac{dz}{dt}$. Itt még a vertikális sebesség dimenziója [Pa s^{-1}] sem egyezik meg a

Descartes-rendszerbelivel: $w = \frac{dz}{dt}$ [m s^{-1}].

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) \neq \mathbf{v}_1(x_1, y_1, \zeta, t_1),$$

ahol $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ és $\mathbf{v}_1(x_1, y_1, \zeta, t_1)$ a sebességvektor alakja az eredeti és az új koordináta-rendszerben.

XI.2.1.2. A két rendszerbeli parciális differenciálhányadosok közötti kapcsolat

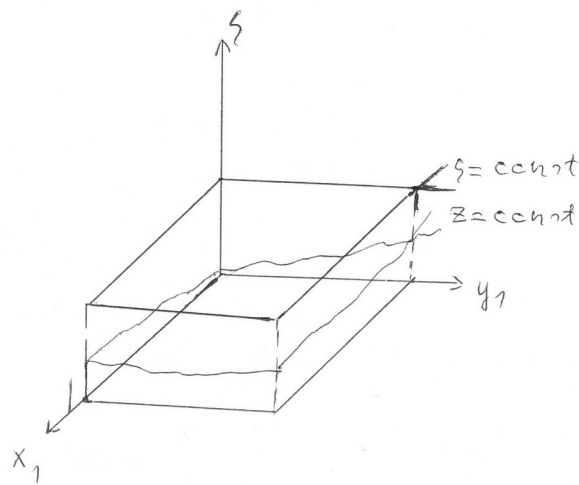
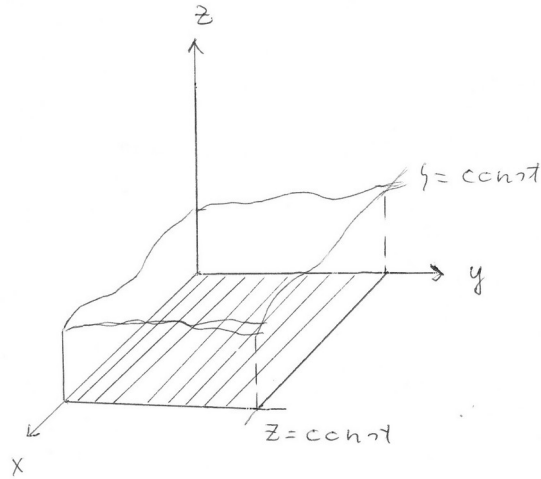
Legyen

$$s \in (x, y, z, t) \quad \text{és} \quad s_1 \in (x_1, y_1, \zeta, t_1).$$

Tekintsük a

$$p(x, y, z, t) = p_1(x_1(x, y, z, t), y_1(x, y, z, t), \zeta(x, y, z, t), t_1(x, y, z, t))$$

skalármezőt (3. ábra).



3. ábra. Koordináta-felületek, térfogatelemek a Descartes-féle és az új vertikális rendszerben.

Ekkor az (1) koordináta-rendszerbeli parciális deriváltak felhasználásával a Descartes-rendszerbeli parciális deriváltak a következő formában írhatók fel:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial s}.$$

Mivel csak a vertikális koordinátázást változtattuk meg, fennáll, hogy

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{\partial t_1}{\partial t} = 1,$$

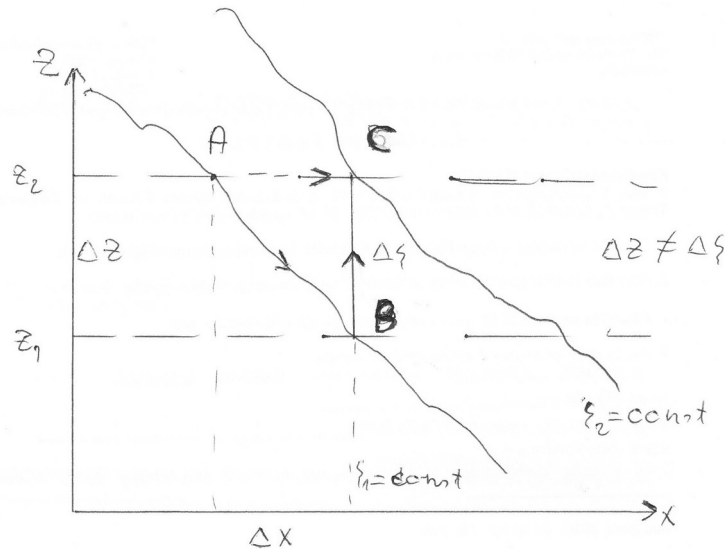
illetve

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial t_1}{\partial x} = \frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{\partial t_1}{\partial y} = \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial t_1}{\partial x} = 0.$$

Természetesen a

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial t_1}$$

deriváltak értéke az új vertikális koordinátázás definíciójától függ. A fenti összefüggések felhasználásával az általános egyenlet is leegyszerűsödik. Koordináta-irányok szerint, a közvetett függvény deriválási szabályait kihasználva (4. ábra) kapjuk, hogy



4. ábra. A nyomásváltozás alakja a két koordináta-rendszerben az (x, z) , illetve (x, ζ) síkban

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y_1} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial p}{\partial y_1} = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t_1} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial p}{\partial t_1} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}.$$

A felírásban már kihasználtuk, hogy $\frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x_1}$, $\frac{\partial p}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y_1}$ és $\frac{\partial p}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t_1}$.

A fenti egyenletek megadják az (1) koordináta-rendszerbeli deriváltak alakját a kiindulási Descartes-féle koordináta-rendszerben, hiszen

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right)_{x_1, y_1, t_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right)_{x, y, t} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{x, y, t} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad \text{és} \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)_{x_1, y_1, t_1} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)_{x, y, t}.$$

Az előző gondolatmenethez hasonlóan a Descartes-rendszerbeli deriváltak felhasználásával is felírhatjuk az új rendszerbeli deriváltakat. Itt a célunk az új koordináta-rendszerbeli deriváltak felhasználásával kifejezni a Descartes-rendszerben felírt deriváltakat. Most a

$$p_1(x_1, y_1, \zeta, t_1) = p(x(x_1), y(y_1), z(x_1, y_1, \zeta, t_1), t(t_1))$$

alakú skalármezőt vizsgáljuk. A két koordináta-rendszer között természetesen fennáll, hogy $x = x_1, y = y_1, t = t_1$. A deriválás elvégzése után:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial y_1} = \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1},$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t_1} = \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_1}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial t_1} - \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

A felírásban most is kihasználtuk, hogy $\frac{\partial p_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_1} = \frac{\partial p_1}{\partial y}$ és

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_1} = \frac{\partial p_1}{\partial t}.$$

A két koordináta-rendszer közötti kapcsolat megadásakor felhasználjuk, hogy

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} \right)_{x,y,t} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} \right)_{x_1,y_1,t_1} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial \zeta} \right)_{x_1,y_1,z_1} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)_{x,y,t} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)_{x_1,y_1,t_1}.$$

Ismét hangsúlyozzuk, hogy egy tetszőleges skalár értéke a két rendszerben (a tér adott pontjában) megegyezik ($p_1 \equiv p$).

XI.2.1.3. A két koordináta-rendszerbeli sebességek

A $P = P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, \zeta)$ pontban a Descartes-rendszerbeli sebesség:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t) = (u, v, w),$$

a sebességkomponensek pedig:

$$u = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad w = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Az (x_1, y_1, ζ, t_1) koordináta-rendszerbeli sebesség a $P(x, y, z) = P_1(x_1, y_1, \zeta)$ pontban:

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt_1} = \dot{x}_1, \quad v_1 = \frac{dy_1}{dt_1} = \dot{y}_1, \quad w_1 = \frac{d\zeta}{dt_1} = \dot{\zeta}.$$

A tér adott pontján a sebességvektor nagysága és iránya (sőt a koordinátázástól függően a vertikális sebesség dimenziója is) különbözik a Descartes-rendszerbelitől.

XI.2.1.4. A sebességek közötti kapcsolat

A két sebességmező közötti kapcsolat felírásakor kihasználjuk, hogy

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad t_1 = t,$$

ami azt jelenti, hogy a horizontális sebességek megegyeznek a két koordináta-rendszerben (5. ábra).

$$u = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt_1} = u_1, \quad v = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt_1} = v_1.$$

Ugyanez nem mondható el a két rendszerbeli vertikális sebességről:

$$w = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad w_1 = \frac{d\zeta}{dt} = \dot{\zeta}.$$

A köztük lévő kapcsolat:

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{dz(x_1, y_1, \zeta, t_1)}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t_1} \frac{dt_1}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial z}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial z}{\partial \zeta} w_1 + \frac{\partial z}{\partial t_1}$$

illetve

$$w_1 = \frac{d\zeta(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} u + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v + \frac{\partial \zeta}{\partial z} w + \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

A Descartes-rendszerbeli modellezési feladatok megoldásakor legtöbbször a nehézségi gyorsulás állandóságával számolunk. Ez az ún. potenciál közelítés, ami két természetes egyszerűsítő feltételt tartalmaz: (i) a gravitációs erő függőleges, azaz a z , illetve ζ tengely irányú, (ii) elhanyagoljuk a nehézségi gyorsulás horizontális és vertikális változásait.

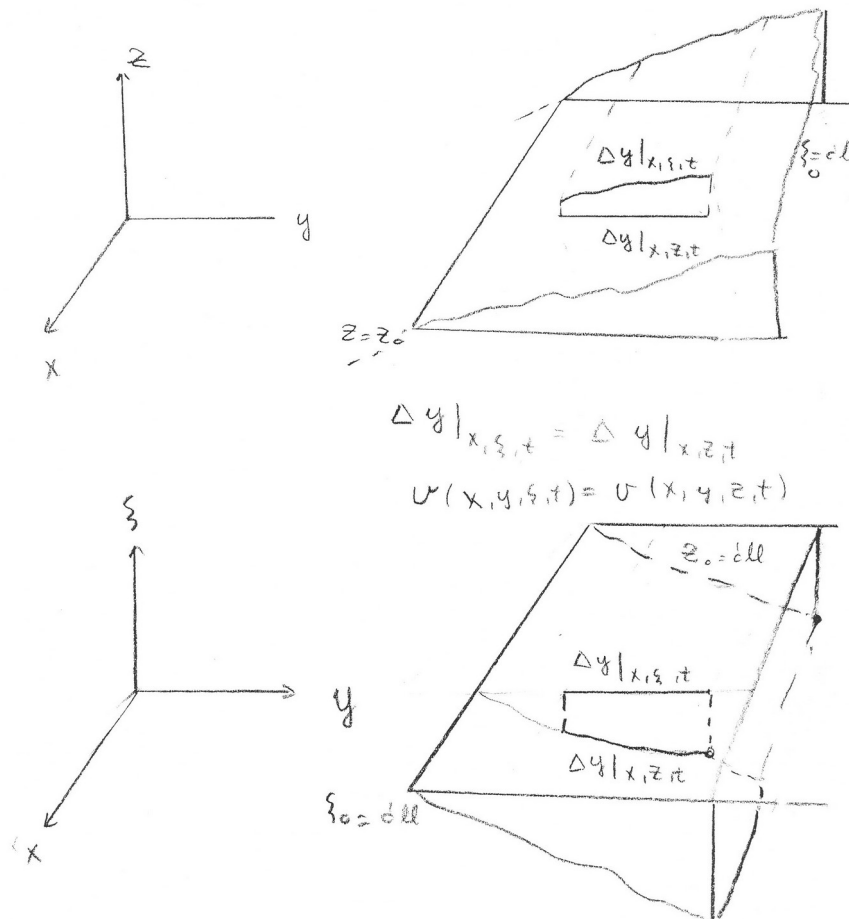
A geopotenciál mező

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_1(\mathbf{r}, t) = \Phi_1(\mathbf{r}_1, t_1)$$

általános alakja helyett a

$$\Phi(x, y, z, t) \equiv gz \equiv \Phi(z) = \Phi(z(x_1, y_1, \zeta, t_1)) = gz(x_1, y_1, \zeta, t_1) = \Phi_1(x_1, y_1, \zeta, t_1)$$

formulával dolgozunk. Azaz a z rendszerben a geopotenciál nem függ a horizontális koordinátáktól és az időtől, csak a z magasságtól. Más függőleges koordinátázás esetén ez már nem teljesül. Az új rendszerben a geopotenciál koordináta-irányok szerinti megváltozása:



5. ábra. A horizontális sebességkomponensek különböző vertikális koordinátázás mellett ($u(x, y, z, t) = u_1(x_1, y_1, \zeta, t)$ és $v(x, y, z, t) = v_1(x_1, y_1, \zeta, t)$).

$$\frac{\partial z}{\partial t_1} = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta},$$

és így

$$w = \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} w_1 \right) = \frac{1}{g} \frac{d\Phi_1}{dt_1}.$$

A teljes deriváltak alakja megegyezik a két koordináta-rendszerben.

Nézzük a másik irányú átírást is a geopotenciál mező felhasználásával. Fejezzük ki a ζ vertikális koordináta Descartes-rendszerbeli parciális deriváltjait! A potenciál közelítés ($\Phi(x,y,z,t) \equiv gz \equiv \Phi(z)$) alkalmazásával:

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}},$$

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}},$$

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}} = \frac{g}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}}.$$

A ζ -rendszerben felírt vertikális sebesség alakja tehát az eredeti z -rendszerben:

$$w_1 = \frac{d\zeta}{dt_1} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v + \frac{\partial \zeta}{\partial z} w = \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}} \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} u - \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} v + gw \right),$$

vagyis visszakaptuk az előzőleg már levezetett összefüggést, hiszen $u = u_1$, $v = v_1$.
Ismét hangsúlyozzuk, hogy $\Phi(z) \equiv \Phi_1(x_1, y_1, \zeta, t_1)$.

XI.2.1.5. A teljes deriváltak

A teljes deriváltak megegyeznek a két koordináta-rendszerben.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{d}{dt_1}.$$

XI.2.1.6. A divergencia alakja

A Descartes-féle és az új koordináta-rendszerben a sebesség definíciója különbözik egymástól, s ahogy már említettük a vertikális sebesség dimenziója is eltérhet a Descartes-rendszerbelitől. Eszerint, az $(_1)$ rendszerbeli divergencia alakja is eltér a Descartes-rendszeritől. A divergenciát, az invariáns integráldefiníciója alapján állíthatjuk elő az (x_l, y_l, ζ, t_l) rendszerben is, ami egyszerű, hisz az új koordináta-rendszer is egyenes vonalú ortogonális (Descartes-rendszer). Az elemi térfogat $(dx_1 dy_1 d\zeta)$ nagysága és dimenziója azonban nem feltétlenül egyezik meg a két rendszerben.

Tekintsük a divergencia definícióját a Descartes-féle koordináta-rendszerben

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

és az új (x_l, y_l, ζ, t_l) rendszerben:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1(\mathbf{r}_1, t_1) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta},$$

ahol \mathbf{r}_1 a helyvektor alakja az új rendszerben. Ahhoz, hogy felírjuk a két koordináta-rendszerbeli divergencia kapcsolatát, meg kell adni a deriváltak alakját. A parciális deriváltak átírási szabályai alapján:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y_1} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

A $\frac{\partial w}{\partial z}$ átírásakor, mind a vertikális sebesség, mind a koordináta-tengely megváltozik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{g} \frac{d\Phi_1}{dt_1} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{d\Phi_1}{dt_1} \right) = \\ &= \frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta}, \end{aligned}$$

hiszen

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 1 .$$

A fenti deriváltak összevetésével:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} ,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right) + \operatorname{div} \mathbf{v}_1(\mathbf{r}_1, t_1) .$$

XI.2.2. A hidro-termodinamikai egyenletrendszer alakja az (x_1, y_1, ζ, t_1) rendszerben

Az előző részben megadtuk a skalárok, a sebességkomponensek, a skalármezők parciális és teljes deriváltjainak, továbbá a kontinuitási egyenletben szereplő sebességdivergencia átírásának általános alakját. Megvan az eszközrendszerünk, hogy felírjuk a Descartes-rendszerbeli hidro-termodinamikai egyenletrendszert más vertikális koordinátázású egyenes vonalú ortogonális rendszerbe. Tekintsük a potenciál közelítéssel ($g = \text{const}$) felírt Descartes-rendszerbeli hidro-termodinamikai egyenletrendszert!

$$\frac{du}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv - lw + \frac{1}{\rho} F_{sx} ,$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + \frac{1}{\rho} F_{sy} ,$$

$$\frac{dw}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + lu + \frac{1}{\rho} F_{sz} ,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) ,$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} \frac{dQ}{dt} , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt} \quad \text{és} \quad \frac{p}{\rho} = RT ,$$

ahol a $f = 2\Omega \sin \varphi$, $l = 2\Omega \cos \varphi$ a Coriolis-erő felírásában szereplő mennyiségek, F_{sx} , F_{sy} , F_{sz} a súrlódási erő komponensei. Ezek átírásával itt nem foglalkozunk, csak jelöljük őket az új rendszerben. (Ha térképsík feletti koordináta-rendszerben számolunk, s nagyskálájú folyamatokat elemzünk, akkor az áttanszformált metrikus gyorsulási tagokat, a teljes Coriolis-erőt, a sebességderiváltak átírásából származó adaléktagokat is át kell írni az új vertikális koordinátázás szerint. E transzformációval itt külön nem foglalkozunk. Maradunk a kisskálájú folyamatoknál, ahol eleve Descartes-rendszerben dolgozunk, elhanyagolva a metrikus gyorsulási tagokat.)

XI.2.2.1. A mozgásegyenletek átírása

Az új rendszerben sem változnak a horizontális koordináták, az idő, a skalárok, a horizontális sebesség, továbbá a teljes deriváltak értéke.

$$x_1 = x, y_1 = y, u_1 = u, v_1 = v, t_1 = t,$$

$$p_1 = p, \Phi_1 = \Phi, \rho_1 = \rho, f_1 = f, l_1 = l,$$

$$\frac{d}{dt_1} \equiv \left(\frac{d}{dt_1} \right) = \left(\frac{d}{dt} \right).$$

A nyomás x és y szerinti parciális deriváltjainak átírásakor – a vertikális mozgásegyenlet alakjától függetlenül – felhasználjuk a sztatika alapegyenletét (sztatikus légkör-közelítés), ami a sűrűségben elhanyagolható, az átlagértéknél legalább 2–3 nagyságrenddel kisebb hibát okoz.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + (\rho_1 g) \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1},$$

és hasonlóképpen

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}.$$

A vertikális nyomásváltozás és a nehézségi erő átírásánál kihasználjuk, hogy:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} \quad \text{és} \quad g = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}.$$

A molekuláris viszkozitásból származó súrlódási erő áttanszformálásával itt nem foglalkozunk, csak jelöljük a tag meglétét. A molekuláris viszkozitás figyelembevétele a mikrometeorológiában, illetve a magaslégkör dinamikájában lényeges. *Megjegyezzük, hogy a légkörben a súrlódási erőt a turbulens kicserélődési folyamatok (impulzusszállítás) okozzák, ennek leírásához az átlagos mozgásra vonatkozó egyenleteken át visz az út, amivel a későbbiekben foglalkozunk. A most felírásra kerülő egyenleteink minden időpillanatban, a tér minden pontján érvényesek : a súrlódási erő a molekuláris viszkozitás következménye.*

A horizontális mozgásegyenletek új alakja:

$$\frac{d u_1}{d t_1} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + f_1 v_1 - l_1 \frac{1}{g} \frac{d \Phi_1}{d t_1} + \frac{1}{\rho_1} F_{sx},$$

$$\frac{d v_1}{d t_1} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} - f_1 u_1 + \frac{1}{\rho_1} F_{sy}.$$

A harmadik *mozgásegyenlet* felírásakor a vertikális sebesség geopotenciálhoz kapcsolódó definíciójából indulunk ki

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\Phi_1}{dt_1} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial \zeta} w_1 \right).$$

A vertikális mozgásegyenlet alakja:

$$\frac{d \left(\frac{1}{g} \frac{d\Phi_1}{dt_1} \right)}{dt_1} = - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} + l_1 u_1 + \frac{1}{\rho_1} F_{sz},$$

amelynek a bal oldala tovább alakítható:

$$\frac{d \left(\frac{1}{g} \frac{d\Phi_1}{dt_1} \right)}{dt_1} = \frac{d \frac{1}{g} \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial \zeta} w_1 \right)}{dt_1}.$$

A fenti kifejezés felhasználásával az új rendszerbeli vertikális sebesség teljes időbeli megváltozására $\left(\frac{dw_1}{dt_1} \right)$ kaphatunk egy bonyolult összefüggést.

Hidrosztatikus közelítés esetén a vertikális mozgásegyenlet leegyszerűsödik. Kiindulva a z-rendszerbeli egyenletből

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

a sztatika alapegyenlete az új rendszerben:

$$0 = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta}.$$

XI.2.2.2. A kontinuitási egyenlet

Kihasználva a teljes derivált és a divergencia – már levezetett – átírását, a kontinuitási egyenlet alakja az új koordináta-rendszerben:

$$\frac{d\rho_1}{dt_1} = - \rho_1 \left[\frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right],$$

illetve

$$\frac{d \ln \rho_1}{dt_1} = - \left[\frac{1}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right].$$

A fenti egyenlet tovább alakítható a szorzat logaritmusára vonatkozó összefüggés felhasználásával:

$$\frac{d \ln \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta}}{d t_1} = - \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right],$$

illetve az Euler-féle szemléletben:

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta}}{\partial t_1} = - \left[\frac{\partial \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} w_1}{\partial \zeta} \right]$$

A fenti egyenlet egyszerű megfontolások alapján is levezethető. Tekintsük a $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ térfogatú ρ sűrűségű m tömegű légrést. Adjuk meg az m tömegű légrést az új koordináta-rendszerben!

$$m = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta = \rho \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} dx_1 \cdot dy_1 \cdot d\zeta = \frac{1}{g} \left(\rho \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} dx_1 \cdot dy_1 \cdot d\zeta \right).$$

A kontinuitási egyenlet tovább alakítható a sztatika alapegyenletének felhasználásával (sztatikus légkör-közelítés, ami nagy- és mezoskálájú folyamatokban alkalmazható). Célunk az egyenlet további egyszerűsítése, a sűrűség és a geopotenciál kiküszöbölése. Kihasználjuk, hogy a sűrűség kifejezhető a nyomás és a geopotenciál vertikális megváltozásával. Hangsúlyozzuk, hogy a közelítés csak hidrosztatikus modellekben alkalmazható.

$$\rho = - \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial p_1}{\partial \zeta}}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta}},$$

így

$$\frac{d \ln \rho_1}{d t} = \frac{d \ln \left(- \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} \right)}{d t_1} - \frac{d \ln \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta}}{d t_1}.$$

A kontinuitási egyenlet új alakja

$$\frac{d \ln \left(- \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} \right)}{d t_1} = \frac{1}{\frac{\partial p_1}{\partial \zeta}} \frac{d \frac{\partial p_1}{\partial \zeta}}{d t_1} = - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right),$$

illetve

$$\frac{d}{dt_1} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = - \frac{\partial p_1}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right).$$

Itt a sűrűség szerepét formailag a $\frac{\partial p_1}{\partial \xi}$ nyomásderivált veszi át.

XI.2.2.3. A termodinamikai egyenlet

$$\frac{d\Theta_1}{dt_1} = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta_1}{T_1} \frac{dQ_1}{dt_1}.$$

XI.2.2.4. A nedvességszállítási egyenlet

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \frac{1}{\rho_1} \frac{dM_1}{dt}.$$

XI.2.2.5. Az állapotegyenlet

$$\frac{p_1}{\rho_1} = RT_1.$$

A skalárváltozók mindkét rendszerben ugyanazok, vagyis

$$T_1 = T, \Theta_1 = \Theta, q_1 = q, M_1 = M.$$

A teljes időbeli deriváltak alakja pedig:

$$\frac{d}{dt_1} = \frac{\partial}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

XI.3. A felszínkövető, a nyomási, a tömeg- és a potenciális hőmérsékleti koordináta-rendszer

A vertikális koordináta-rendszerek fejlődését követve bemutatjuk a légköri hidrotermodinamikai egyenletrendszer alakját a felszínkövető (z^*), a szinoptikus meteorológiában oly gyakran alkalmazott nyomási (p) és a frontanalízisben, illetve a nagytávolságú trajektóriaszámításban használatos potenciális hőmérsékleti (Θ) koordináta-rendszerben. A másik két koordináta-rendszerrel szemben a z^* -rendszer alkalmazható mind hidrosztatikus, mind nemhidrosztatikus esetben.

XI.3.1. A felszínkövető (z^*) koordináta-rendszer

Komplex felszínnek, pl. hegy- és dombvidékek felett a levegő áramlása követi a felszín formáját. Gondoljunk csak az orográfikus feláramlásra, amit nehéz leírni a Descartes-féle (x, y, z) koordináta-rendszerben. Problémát okoz a légköri modellek alsó határfeltételének a megadása, s a számításban alkalmazott rácshálózat felépítése – az ekvidisztáns rácshálózat – belemetsz a felszínbe. Adott z magasságban haladva – a domborzat alakjától függően – egyszer a szabad légkörben, egyszer a „felszín alatt vagyunk”. Bonyolulttá válik a véges különbséges numerikus módszerek alkalmazása. E problémákat oldja meg a felszínkövető (x^*, y^*, z^*) koordináta-rendszer. Elsősorban a mezoskálájú folyamatok, illetve a planetáris határréteg modellezésében használják mind hidrosztatikus, mind nem hidrosztatikus közelítés esetén. Problémát jelent azonban, hogy a felszín felett nagy magasságban is követi a koordinátázás a domborzatot, míg az áramlási mező már nem. A mai numerikus modellekben már kevésbé alkalmazzák. A történetiség miatt és a vertikális koordinátázás fejlődésének megértése végett foglalkozunk vele.

A felszínkövető koordináta-rendszer új függőleges koordinátája (6. ábra):

$$z^* = z - z_0(x, y),$$

ahol $z_0(x, y)$ a felszín magassága, z^* pedig a felszín feletti magasság. Az áttérés során a horizontális koordinátázás és az idő nem változik:

$$x = x^*, \quad y = y^*, \quad t = t^* .$$

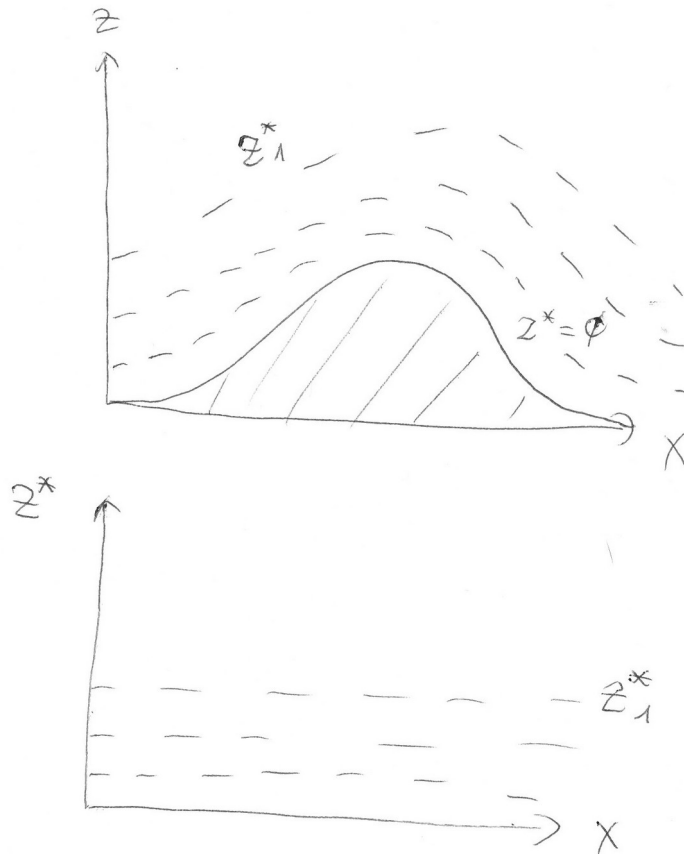
Az új koordináta-rendszer egységvektorai: $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$. Ezekre teljesül, hogy

$$\mathbf{i}^* = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}^* = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}^* = \mathbf{k} .$$

(A helyi függőleges nem változik az áttérés során.) A horizontális sebességkomponensek értéke megegyezik az eredeti (x, y, z) rendszerbeli értékekkel:

$$u^* = u, \quad v^* = v .$$

(A jobb érthetőség kedvéért minden esetben jelöljük, hogy melyik koordináta-rendszerben vagyunk. A skalárok mindkét rendszerben ugyanazok. Itt nem tüntetjük fel külön a koordináta-rendszert. Szintén nem adjuk meg a koordináta-rendszert a teljes időbeli deriváltak általános alakjában, hiszen ez is független a koordináta-rendszer választásától. A sebesség komponensek esetén, illetve a teljes időbeli deriváltak kifejtésekor jelezzük az alkalmazott koordináta-rendszert.)



6. ábra. A felszínkövető koordináta-rendszer.

A z -rendszerbeli vertikális sebesség (w) megváltozik az áttérés során.

$$w^* = \frac{dz^*}{dt} = \frac{dz^*(x, y, z)}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_0(x, y)}{dt} = w - \left(u \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x} + v \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y} \right)$$

A felszínkövető rendszerben a w^* vertikális sebesség a z -rendszerbeli vertikális sebesség (w) azon része, amit nem a domborzat befolyásol, pl. termikus hatások. Ha a légréteg a domborzat alakjával párhuzamosan halad a felszíntől mindig ugyanolyan távolságban, akkor a felszínkövető rendszerben nem lesz vertikális sebessége ($w^* = 0$). A felszíntől távolodva a légrétegek már nem követik a domborzat futását – feleslegesen bonyolulttá válik a vertikális sebességi mező leírása.

A z -rendszerbeli vertikális sebesség is megadható a z^* -rendszerbeli sebességek ismeretében:

$$w = w^* \left(1 + \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial x} u + \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y} v \right)$$

A felszínkövető rendszerben, ahol a talajfelszín a $z^* = 0$ nivófelületet jelenti, a felszín normálvektora megegyezik a függőleges koordináta-tengely egységvektorával.

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{k}^* .$$

Nézzük a felszín normálvektorát az (x, y, z) koordináta-rendszerben! Ez egy bonyolult kifejezés lesz:

$$\mathbf{n} = \frac{-\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\left[\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2}} .$$

A merev fal körüli áramlás határfeltétele az (x, y, z) koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 ,$$

ahol $\mathbf{v} = (u, v, w)$, míg a felszínkövető rendszerben egyszerűen

$$w^* = 0 .$$

A mozgásegyenletek átírásához szükségünk van a nyomási gradiens új alakjára. A gradiens invariáns mennyiség, reprezentációja azonban függ a koordináta-rendszer választásától.

$$p(x, y, z, t) = p(x^*(x), y^*(y), z^*(x, y, z), t^*(t)) ,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x^*} + \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x^*} - \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x^*} - \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z_0}{\partial x} .$$

Emlékeztetünk, hogy $x^* \equiv x$, $y^* \equiv y$. A deriváltakban szereplő index megadja, hogy melyik koordináta-rendszerben dolgozunk. A felszín magassága csak az x és y koordinátától függ. Ezek nem változnak az áttérés során.

$$\frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x^*} \quad \text{és} \quad \frac{\partial z_0}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y^*} .$$

Hasonló számítások után kapjuk az y^* irányú parciális nyomásváltozást:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y^*} - \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z_0}{\partial y^*} .$$

(Megjegyezzük, hogy itt és a továbbiakban, amikor a $z_0(x, y)$ jelölést használjuk – legyen az a z , vagy a felszínkövető z^* -koordináta-rendszer – a felszín magasságáról beszélünk, ami függ az x és y koordinátától, nem pedig a z^* -rendszerbeli 0 nívófelületről).

A nyomási gradiens vertikális összetevője mindkét koordináta-rendszerben ugyanaz:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial(z - z_0(x, y))}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z^*} .$$

Descartes-rendszerben a geopotenciál horizontális gradiense nulla (állandó gravitációs erő feltételezése), nem így a felszínkövető rendszerben.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial(gz)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x^*} + \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^*} - g \frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^*} - g \frac{\partial z_0}{\partial x^*} ,$$

vagyis teljesül, hogy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^*} = g \frac{\partial z_0}{\partial x^*} ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^*} = g \frac{\partial z_0}{\partial y} = g \frac{\partial z_0}{\partial y^*} .$$

A geopotenciál függőleges változása értelemszerűen megegyezik a két rendszerben.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g = \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} \frac{\partial(z - z_0(x, y))}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} = g .$$

A nyomási gradiens erő ismeretében a horizontális mozgásegyenletek új alakja:

$$\frac{dv^*}{dt} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x^*} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^*} \right) + f_y^* + F_{y^*} ,$$

$$\frac{dv^*}{dt} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y^*} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y^*} \right) + f_x^* + F_{x^*} .$$

A fenti egyenletek tovább alakíthatók a geopotenciál horizontális megváltozására kapott

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^*} = g \frac{\partial z_0}{\partial x^*} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z_0}{\partial x^*} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z_0}{\partial x^*} ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^*} = g \frac{\partial z_0}{\partial y^*} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z_0}{\partial y^*} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z_0}{\partial y^*}$$

kifejezések felhasználásával. Itt a sztatika alpegyenletét alkalmazzuk. Az ebből származó hiba elhanyagolható a nemhidrosztatikus modellekben a horizontális nyomási gradiens erő megadásában.

$$\frac{dv^*}{dt} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x^*} + \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z_0}{\partial x^*} \right) + f_y^* + F_{y^*} ,$$

$$\frac{dv^*}{dt} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y^*} + \frac{\partial p}{\partial z^*} \frac{\partial z_0}{\partial y^*} \right) + f_x^* + F_{x^*} .$$

E közelítés alkalmazható mind a sztatikus, mind a nem hidrosztatikus modellekben.

A *vertikális mozgásegyenlet* alakja, a z-rendszerbeli vertikális sebesség átírását kihasználva nem-hidrosztatikus feltételezés mellett:

$$\frac{dw^*}{dt} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} u^* + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} v^* + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} w^* = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z^*} + f_w^* + F_w^*$$

Nézzük meg részletesebben az egyenlet bal oldalát.

$$\frac{dw^*}{dt}$$

$$= \frac{dw^*}{dt} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \frac{dx^*}{dt} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \frac{dy^*}{dt} + w^* \left(u^* \frac{\partial^2 z_0}{(\partial x^*)^2} + v^* \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^* \partial x^*} \right) + v^* \left(u^* \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^* \partial y^*} + v^* \frac{\partial^2 z_0}{(\partial y^*)^2} \right)$$

Jól látszik a domborzat lejtéséből adódó – a horizontális sebességből és gyorsulásból származó – adaléktag. A horizontális mozgásegyenletek felhasználásával (a horizontális sebesség teljes időbeli megváltozását felírva) a felszínkövető koordináta-rendszerben a vertikális sebesség teljes időbeli megváltozására kapunk egyenletet:

$$\frac{dw^*}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^*} + f_w^* + \frac{1}{\rho} F_w^* \cdot \frac{\partial z_0}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y^*} + f_w^* + \frac{1}{\rho} F_w^*$$

~~~~~

*Hidrosztatikus esetben* a sztatika alapegyenletét alkalmazzuk:

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z^*},$$

amiből átalakítások után kapjuk, hogy

$$\frac{\partial p}{\partial z^*} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z^*}.$$

Megjegyezzük, hogy a z\*-rendszerben a sztatika alapegyenlete teljesülhet akkor is, ha  $\frac{dw^*}{dt} \neq 0$ , hiszen az áttérés során azt feltételeztük, hogy

$$\frac{dw^*}{dt} = \frac{d}{dt} \left( w^* + u^* \frac{\partial z_0}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial z_0}{\partial y^*} \right).$$

Következő lépésként nézzük a kontinuitási egyenletet! Ennek alakja formailag nem változik, hiszen

$$\frac{\partial p}{\partial z^*} = \frac{\partial p}{\partial z^*}.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a legradicionálisabb módon elvégezzük a kontinuitási egyenletben szereplő deriváltak átírását. Nézzük most ezt az utat!

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\rho \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \cdot \left( \frac{\partial x^*}{\partial x} + \frac{\partial y^*}{\partial y} + \frac{\partial z^*}{\partial z} \right)$$

$$\cdot \rho \left( \frac{\partial \hat{x}}{\partial x^*} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y^*} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial z^*} \right) = -\rho \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)$$

Összefoglalva:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \rho}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \rho}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial \rho}{\partial z^*} = -\rho \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)$$

Az áttérés után formailag nem változik sem a *termodinamikai*, sem a *nedvességszállítási egyenlet*, sem pedig az *állapotegyenlet*.

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} \frac{dQ}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt}, \quad \frac{p}{\rho} = RT$$

Ismét megjegyezzük, hogy a teljes deriváltak értéke nem változik, de reprezentációjuk igen.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial}{\partial z^*}$$

### XI.3.2. A nyomási koordináta-rendszer

A nyomás ( $p$ ) a leggyakrabban használt vertikális koordináta a meteorológiában. Gondoljunk csak a szinoptikus gyakorlatban alkalmazott abszolút topográfia térképekre. A következőkben e rendszerrel ( $x_p, y_p, p, t_p$ ) ismerkedünk meg. A nyomási rendszerben a végtelen magasságú légkört egy véges vastagságú  $[p, 0]$  rétegbe képezzük le. Ez a hidro-termodinamikai egyenletrendszer, különösen a kontinuitási egyenlet egyszerűbb felírását teszi lehetővé. Problémát okoz azonban a modell alsó határfeltételének a megadása, hiszen a felszíni nyomás, s így a modell alsó szintje változik a domborzat és az időjárási helyzet függvényében  $p_0(x, y, t)$ . A hidro-termodinamikai egyenletrendszert hidrosztatikus közelítéssel írjuk fel. Elsőként egyébként Eliassen adta meg az egyenleteket 1949-es cikkében és alkalmazta később a numerikus modellezésben.

A nyomási rendszert a nagyskalájú folyamatok leírásában alkalmazzák. Itt megfelelő a hidrosztatikus közelítés. Nemhidrosztatikus közelítés esetén az ún.  $\pi$ , vagy tömegkoordináta-rendszert alkalmazzuk, amivel a következő alfejezetben foglalkozunk részletesebben.

Elsőként írjuk fel a nyomást az új (nyomási) koordináta-rendszerben.

$$p(x_p, y_p, p, t_p) = p(x(x_p), y(y_p), z(x_p, y_p, p, t_p), t(t_p))$$

illetve

$$p(x, y, z, t) = p(x_p(x), y_p(y), p(x, y, z, t), t_p(t))$$

Természetesen

$$x_p = x, \quad y_p = y, \quad t_p = t.$$

A  $z$ -rendszerbeli horizontális nyomási gradiens új alakja, felhasználva a

$$\frac{\partial p}{\partial x_p} = 0 = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_p} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_p} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial p}{\partial y_p} = 0 = \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_p} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_p} = \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y_p}$$

összefüggést:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y_p}.$$

A  $z$ -rendszerbeli horizontális nyomási gradiens tehát nem más mint a  $p$ -rendszerbeli horizontális geopotenciál-gradiens és a sűrűség szorzata.

Formailag nem változik a teljes deriváltak alakja sem.

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_z = \left( \frac{d}{dt} \right)_p = \frac{\partial}{\partial t_p} + u_p \frac{\partial}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial}{\partial y_p} + w_p \frac{\partial}{\partial p}$$

A két rendszerbeli horizontális sebességek megegyeznek ( $u = u_p$ ,  $v = v_p$ ). Nem ez a helyzet a vertikális sebességgel. A nyomási rendszerben a vertikális sebesség (a függőleges koordináta teljes időbeli megváltozása):

$$w_p = \frac{d p}{d t} \equiv \omega$$

[Pa s<sup>-1</sup>] dimenziójú. Természetesen most is megadható a két koordináta-rendszerbeli vertikális sebesség közötti kapcsolat:

$$\omega = \frac{d p}{d t} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} - w \rho g = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{d \Phi}{d t},$$

illetve

$$w = \frac{d z}{d t} = \frac{1}{g} \frac{d \Phi}{d t} = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t_p} + u_p \frac{\partial \Phi}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial \Phi}{\partial y_p} + \omega \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t_p} + u_p \frac{\partial \Phi}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial \Phi}{\partial y_p} - \omega \frac{1}{\rho} \right).$$

Következő lépésként a *horizontális mozgásegyenletek* átírásával foglalkozunk. Nyomási rendszerben a nyomási gradiens erő a geopotenciál változásával adható meg, hiszen rögzített nyomási felületen nem változik a nyomás  $\left( \frac{\partial p}{\partial x_p} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y_p} = 0 \right)$ . Így:

$$\frac{d u_p}{d t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_p} + f v_p - l \left( \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t_p} + u_p \frac{\partial \Phi}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial \Phi}{\partial y_p} - \omega \frac{1}{\rho} \right) \right) + \frac{1}{\rho} F_{sx_p},$$

$$\frac{dv_p}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y_p} - fu_p + \frac{1}{\rho} F_{sy_p} .$$

A hidrosztatikai egyenlet átírása is egyszerű. Új alakja:

$$0 = -g \frac{\partial z}{\partial p} - \frac{1}{\rho} = -\frac{\partial\Phi}{\partial p} - \frac{1}{\rho} = -\frac{\partial\Phi}{\partial p} - \alpha = -\frac{\partial\Phi}{\partial p} - \frac{RT}{p} = 0 .$$

Szintén leegyszerűsödik a  $p$ -rendszerbeli *kontinuitási egyenlet*.  $p$ -rendszerben egy tetszőleges térfogatelem tömege állandó. A kontinuitási egyenlet nem más, mint a  $p$ -rendszerbeli sebességdivergencia nulla volta.

$$0 = \frac{\partial u_p}{\partial x_p} + \frac{\partial v_p}{\partial y_p} + \frac{\partial \omega}{\partial p} .$$

A nyomási rendszerben a léggör összenyomhatatlan közegként viselkedik, de úgy, hogy továbbra is érvényben marad az állapotegyenlet, vagyis továbbra is mint ideális gázt kezeljük. Ez megengedi a baroklinitást.

Megjegyezzük, ha a léggört mint összenyomhatatlan folyadékot írjuk le (a fizikából jól ismert ún. sekélyvíz-egyenleteket alkalmazzuk), akkor már csak barotrop folyamatokat modellezhetünk.

A kontinuitási egyenlet lehetőséget ad a vertikális sebességi mező integrál-előállítására. Tekintsük a  $p_0$  felszíni nyomás és a  $p_1$  nyomási szint közötti légréteget:

$$\omega(p_1) - \omega(p_0) = - \int_{p_0}^{p_1} \left( \frac{\partial u_p}{\partial x_p} + \frac{\partial v_p}{\partial y_p} \right) dp .$$

A nyomási rendszerben a vertikális sebesség a léggör felső határán ( $p = 0$ ) természetesen nulla, míg a felszínen térben és időben is változik.

A  $p$ -rendszerbe történő áttérés után formailag nem változik sem a termodinamikai egyenlet, sem a nedvességszállítási egyenlet, sem az állapotegyenlet.

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t_p} + u_p \frac{\partial\Theta}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial\Theta}{\partial y_p} + \omega \frac{\partial\Theta}{\partial p} = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} \frac{dQ}{dt} ,$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t_p} + u_p \frac{\partial q}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial q}{\partial y_p} + \omega \frac{\partial q}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt} ,$$

$$\frac{p}{\rho} = RT .$$

### XI.3.3. A tömegkoordináta-rendszer

Kiindulási egyenletünk a kontinuitási egyenlet általános alakja:



$$\frac{d\left(\rho \frac{\partial z_1}{\partial \xi}\right)}{dt_1} = -\rho \frac{\partial z_1}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right),$$

Az új vertikális koordináta-rendszert ( $\pi = \xi$ ) válasszuk meg úgy, hogy a  $\rho \frac{\partial z}{\partial \pi}$  kifejezés a légpálya mentén legyen állandó (szolenoidális kényszer).

$$\frac{d\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \pi}\right)}{dt} = 0.$$

Az állandó értéke a nehézségi gyorsulás reciprokának mínusz egyszerese:

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = -\rho g, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \pi} = -\alpha,$$

ahol  $\alpha$  a specifikus térfogat ( $\alpha = 1/\rho$ ),  $\pi$  a hidrosztatikai nyomás, ami az adott szint feletti légoszlop tömegétől függ. Ezért nevezik a  $\pi$  rendszert hidrosztatikai nyomás-, vagy tömegkoordináta-rendszernek.

$$\pi(x, y, z, t) = \pi_T + \int_z^{z_T} \rho(x, y, z', t) \cdot g \cdot dz, \quad \text{ahol} \quad \pi_T = \pi_T(x, y, z_T, t).$$

A légör felső határán ( $z_T \rightarrow \infty$ )  $\pi_T = 0$ . A  $\pi$  értéke a nyomás görög kezdőbetűjéből származik. A légkör egy többfázisú diszperz rendszer. Gondoljunk csak az aeroszol részecskékre, a felhő és csapadékelemekre. A sűrűség integráljával definiált sztatikus nyomás tehát nagyobb, mint az adott szinten mért légnyomás. A geopotenciált a sztatika alapegyenletének  $\pi$ -rendszerbeli integrálásával kapjuk:

$$\Phi(x, y, \pi, t) = \Phi_0 + \int_{\pi_0}^{\pi} \alpha(x, y, \pi', t) \cdot d\pi', \quad \text{ahol} \quad \Phi_0 = \Phi(x, y, \pi_0, t).$$

A fenti egyenlet a nemhidrosztatikus analógiája a  $p$ -rendszerbeli felírásnak:

$$\Phi(x, y, p, t) = \Phi_0 + \int_{p_0}^p \alpha(x, y, p', t) \cdot dp', \quad \text{ahol} \quad \Phi_0 = \Phi(x, y, p_0, t).$$

Adott  $p_0$  szinten – a légkörben mindig jelenlevő aeroszol részecskék, felhő- és csapadékelemek miatt –  $\pi_0 > p_0 = p(\pi_0)$ . Az egyenlőtlenség alapja a tömeg és a súly jelentésbeli különbsége.

Leegyszerűsödik a kontinuitási egyenlet is a  $p$ -rendszerben, a teljes tömeg megmaradását fejezi ki

$$\frac{\partial u_\pi}{\partial x} + \frac{\partial v_\pi}{\partial x} + \frac{\partial w_\pi}{\partial x} = 0,$$

ahol  $w_\pi = \frac{d\pi}{dt}$ . Megjegyezzük, hogy  $w_\pi$  értéke függ a  $p$  nyomás teljes időbeli változásától ( $w_p$ ) és a légoszlopban levő szilárd és cseppfolyós részecskék mennyiségének (tömegének) a változásától. Gondoljunk csak a csapadék hullásra, amikor állandó nyomás mellett is csökkenhet a légoszlop tömege. A felszín mint nyelő (száraz vagy nedves ülepedés, illetve csapadék) és forrás (pl. párolgás) szerepel modellekben.

A két koordináta-rendszerbeli vertikális sebesség közötti kapcsolat:

$$w_\pi = \frac{d\pi}{dt} = \frac{\partial\pi}{\partial t} + u \frac{\partial\pi}{\partial x} + v \frac{\partial\pi}{\partial y} + w \frac{\partial\pi}{\partial z} = \frac{\partial\pi}{\partial t} + u \frac{\partial\pi}{\partial x} + v \frac{\partial\pi}{\partial y} - w\rho g = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{d\Phi}{dt},$$

illetve

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u_\pi \frac{\partial\Phi}{\partial x_\pi} + v_\pi \frac{\partial\Phi}{\partial y_\pi} + w_\pi \frac{\partial\Phi}{\partial \pi} \right) = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u_\pi \frac{\partial\Phi}{\partial x_\pi} + v_\pi \frac{\partial\Phi}{\partial y_\pi} - w_\pi \frac{1}{\rho} \right).$$

A horizontális és a vertikális deriváltak átírásánál kihasználjuk, hogy:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_\pi} + \frac{\partial z}{\partial x_\pi} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x_\pi} - \frac{\partial\pi}{\partial z} \frac{\partial\Phi}{\partial x_\pi} \frac{\partial}{\partial \pi} = \frac{\partial}{\partial x_\pi} + \rho \frac{\partial\Phi}{\partial x_\pi} \frac{\partial}{\partial \pi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_\pi} + \frac{\partial z}{\partial y_\pi} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y_\pi} - \frac{\partial\pi}{\partial z} \frac{\partial\Phi}{\partial y_\pi} \frac{\partial}{\partial \pi} = \frac{\partial p}{\partial y_\pi} + \rho \frac{\partial\Phi}{\partial y_\pi} \frac{\partial}{\partial \pi},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial\pi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \pi} = -\rho g \frac{\partial}{\partial \pi}.$$

A fentiek alapján már felírhatjuk a kormányzóegyenleteket nemhidrosztatikus esetben:

Az új prognosztikai egyenletek:

$$\frac{du_\pi}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\pi} - \frac{\partial p}{\partial \pi} \frac{\partial\Phi}{\partial x_\pi} + fv_\pi - l \left( \frac{1}{g} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u_\pi \frac{\partial\Phi}{\partial x_\pi} + v_\pi \frac{\partial\Phi}{\partial y_\pi} - w_\pi \frac{1}{\rho} \right) \right) + \frac{1}{\rho} F_{sx_\pi},$$

$$\frac{dv_\pi}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_\pi} - \frac{\partial p}{\partial \pi} \frac{\partial\Phi}{\partial y_\pi} - fu_\pi + \frac{1}{\rho} F_{sy_\pi}.$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d \left( \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} \right)_\pi}{dt} = -g \left( 1 - \frac{\partial p}{\partial \pi} \right) + lu_\pi + \frac{1}{\rho} F_{sz}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} \frac{dQ}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt}.$$

A z-rendszerbeli vertikális sebesség teljes időbeli megváltozását nem részletezzük a  $\pi$ -rendszerben. Az ilyen típusú áttéréssel a felszínkövető koordináta-rendszer kapcsán már foglalkoztunk. Megjegyezzük, hogy a termodinamikai egyenlet potenciális hőmérséklettel

felírt alakja helyett a hőmérséklet- és a nyomásváltozásra is megadhatunk egy-egy összefüggést, felhasználva a z-rendszerbeli termodinamikai egyenlet különböző felírásait és a specifikus térfogatra vonatkozó kontinuitási egyenletet.

$$\frac{dT}{dt} = + \frac{1}{\rho c_p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{c_p P}{c_v} D_\pi + \frac{p}{c_v T} \frac{dQ}{dt}$$

Két diagnosztikai egyenletünk van:

$$\frac{\partial u_\pi}{\partial x} + \frac{\partial v_\pi}{\partial x} + \frac{\partial w_\pi}{\partial x} = 0, \quad \frac{p}{\rho} = RT$$

A teljes deriváltak alakja, illetve a z-rendszerbeli divergencia átírása:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\pi \frac{\partial}{\partial x_\pi} + v_\pi \frac{\partial}{\partial y_\pi} + w_\pi \frac{\partial}{\partial \pi},$$

$$D_\pi = \frac{\partial u_\pi}{\partial x_\pi} + \frac{\partial v_\pi}{\partial y_\pi} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_\pi} \frac{\partial u_\pi}{\partial \pi} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y_\pi} \frac{\partial v_\pi}{\partial \pi} + \rho g \frac{\partial w}{\partial \pi},$$

ahol a z-rendszerbeli vertikális sebesség korábban már bemutatott átírását és a  $\frac{\partial w}{\partial \pi}$  derivált kifejtését nem részletezzük.

### XI.3.4. Az izentrop koordináta-rendszer

Frontanalízisnél, légpályaszámításnál gyakran használják az izentrop (potenciális hőmérsékleti) koordináta-rendszert ( $x_\Theta, y_\Theta, \Theta, t_\Theta$ ).

A z-rendszer és a  $\Theta$ -rendszer közötti bijektív leképezés feltétele, hogy a potenciális hőmérséklet a magassággal szigorúan monoton változzék. A légkör sajátja a stabilis rétegződés, ezért a légköri modellekben a potenciális hőmérséklet szigorúan monoton növekszik a magassággal. Az ilyen koordináta-rendszer nem alkalmas a szabad konvekció, a konvektív határreteg, illetve a nem hidrosztatikus folyamatok modellezésére. A szabad légkör felsőbb rétegeiben azonban már alkalmazzák (7. ábra).

Természetesen a  $\Theta$ -rendszerben is fennáll, hogy

$$x_\Theta = x, \quad y_\Theta = y, \quad t_\Theta = t, \quad u_\Theta = u, \quad v_\Theta = v.$$

Egyszerűen értelmezhető a potenciális hőmérsékleti rendszerben a vertikális sebesség.

$$w_\Theta = \frac{d\Theta}{dt}.$$

Ez csak akkor különbözik nullától, ha az elmozduló légréteg (pontosabban a gőzfázis) entrópiája megváltozik, vagyis hőfelvétel vagy hőleadás történik (fázisátalakulások, sugárzási folyamatok, diffúzió).  $w_\Theta$  dimenziója  $[K s^{-1}]$ .

Az áttérés során formailag nem változik a teljes időbeli derivált alakja:

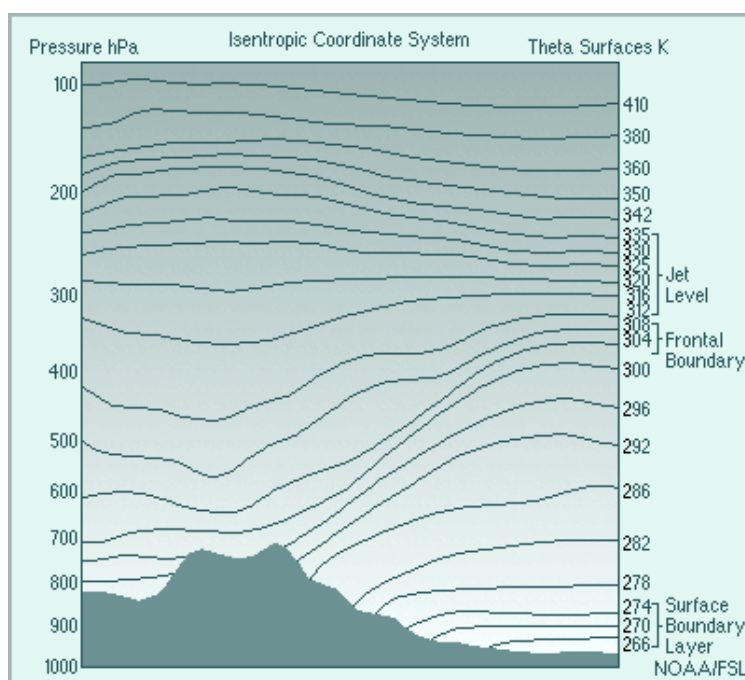
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_\Theta} + u_\Theta \frac{\partial}{\partial x_\Theta} + v_\Theta \frac{\partial}{\partial y_\Theta} + w_\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} .$$

Könnyen megadható a kapcsolat a  $z$ -rendszerbeli és a  $\Theta$ -rendszerbeli vertikális sebesség között is.

$$w_\Theta = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + u \frac{\partial\Theta}{\partial x} + v \frac{\partial\Theta}{\partial y} + w \frac{\partial\Theta}{\partial z} ,$$

illetve

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t_\Theta} + u_\Theta \frac{\partial\Phi}{\partial x_\Theta} + v_\Theta \frac{\partial\Phi}{\partial y_\Theta} + w_\Theta \frac{\partial\Phi}{\partial \Theta} \right) .$$



7. ábra. Izentrop vonalak futása nyomási koordináta-rendszerben ábrázolva. A bemutatott esetben a nyomás és a potenciális hőmérséklet között bijektív függvénykapcsolat van.

Következő lépésként nézzük meg a horizontális nyomási gradiens átírását, amit az  $x$  irányú nyomásváltozás példáján mutatunk be. Kiinduló egyenletünk:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x_\Theta} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_\Theta} .$$

Felhasználva a potenciális hőmérséklet definíciós egyenletét

$$\Theta = T \left[ \frac{P_{00}}{p} \right]^{R/c_p},$$

ahol  $p_{00}$  az 1000 hPa-os szint nyomása, továbbá kihasználva, hogy a  $\Theta$ -rendszerbeli horizontális nívófelületeken a potenciális hőmérséklet állandó, kapjuk, hogy

$$0 = \frac{\partial \ln \Theta}{\partial x_\Theta} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_\Theta} - \frac{1}{p} \frac{R}{c_p} \frac{\partial p}{\partial x_\Theta},$$

illetve az állapotegyenlet alapján:

$$\frac{\partial p}{\partial x_\Theta} = \frac{p}{T} \frac{c_p p}{R} \frac{\partial T}{\partial x_\Theta} = \rho \frac{\partial c_p T}{\partial x_\Theta},$$

A fentiek alapján a z-rendszerbeli horizontális nyomási gradiens alakja a potenciális hőmérsékleti rendszerben:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x_\Theta} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_\Theta} = \rho \frac{\partial c_p T}{\partial x_\Theta} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_\Theta} = \rho \frac{\partial (c_p T + \Phi)}{\partial x_\Theta} = \rho \frac{\partial \nu}{\partial x_\Theta},$$

illetve

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y_\Theta} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y_\Theta} = \rho \frac{\partial c_p T}{\partial y_\Theta} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y_\Theta} = \rho \frac{\partial (c_p T + \Phi)}{\partial y_\Theta} = \rho \frac{\partial \nu}{\partial y_\Theta},$$

ahol  $\nu = c_p T + \Phi$  az ún. Montgomery-potenciál, vagyis a tömegegységnyi levegőre vonatkozó szenzibilis hő és a potenciális energia összege – ami egy konstans erejéig bizonytalan.

A horizontális nyomási gradiens átírása után nézzük a mozgásegyenletek új alakját:

$$\frac{d u_\Theta}{d t} = - \frac{\partial \nu}{\partial x_\Theta} + f v_\Theta - l \left( \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t_\Theta} + u_\Theta \frac{\partial \Phi}{\partial x_\Theta} + v_\Theta \frac{\partial \Phi}{\partial y_\Theta} + w_\Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \right) \right) + \frac{1}{\rho} F_{sx_\Theta},$$

$$\frac{d v_\Theta}{d t} = - \frac{\partial \nu}{\partial y_\Theta} - f u_\Theta + \frac{1}{\rho} F_{sy_\Theta}.$$

A hidrosztatikai egyenlet új alakja:

$$0 = - \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} - \frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial \Theta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} - RT \frac{\partial \ln p}{\partial \Theta} = 0.$$

A  $\frac{\partial p}{\partial \Theta}$  derivált a légköri stabilitás mérőszámaként kezelhető. A dinamikus meteorológiában használt ún. sztatikai stabilitási paraméter ( $\sigma$ ) e derivált felhasználásával számítható:

$$\sigma = \frac{\alpha}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p} = RT \frac{\partial \ln \Theta}{\partial \ln p} .$$

A sztatika alapegyenlete tovább alakítható, úgy hogy az egyenletben szerepeljen a Montgomery-potenciál. Kihhasználva, hogy a potenciális hőmérséklet logaritmusos megváltozása

$$d \ln \Theta = d \ln T - \frac{R}{c_p} d \ln p ,$$

továbbá

$$\frac{\partial \ln \Theta}{\partial \Theta} = \frac{1}{\Theta} = \frac{\partial \ln T}{\partial \Theta} - \frac{R}{c_p} \frac{\partial \ln p}{\partial \Theta} ,$$

és

$$- RT \frac{\partial \ln p}{\partial \Theta} = \frac{c_p T}{\Theta} - \frac{c_p T \partial \ln T}{\partial \Theta} = \frac{c_p T}{\Theta} - \frac{\partial c_p T}{\partial \Theta}$$

felhasználásával kapjuk a sztatika alapegyenletének keresett alakját.

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} - \frac{\partial c_p T}{\partial \Theta} + \frac{c_p T}{\Theta} = 0 , \quad \text{illetve} \quad - \frac{\partial v}{\partial \Theta} + \frac{c_p T}{\Theta} = 0 .$$

A *kontinuitási egyenlet* átírásakor a  $\frac{\partial p}{\partial \Theta}$  derivált teljes időbeli változására kapunk egyenletet, vagyis egy légrézstabilitásának a megváltozását vizsgáljuk. E változás oka a  $\Theta$ -rendszerbeli sebességdivergencia.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial p}{\partial \Theta} = - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \left( \frac{\partial u_{\Theta}}{\partial x_{\Theta}} + \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial y_{\Theta}} + \frac{\partial w_{\Theta}}{\partial \Theta} \right) .$$

Lényegesen leegyszerűsödik a *termodinamikai egyenlet* is:

$$\frac{d \Theta}{dt} = w_{\Theta} = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} \frac{d Q}{dt} .$$

Adiabatikus folyamatok során:

$$\frac{d \Theta}{dt} = w_{\Theta} = 0$$

A *nedvességszállítási egyenlet* és az *állapotegyenlet* nem változik formailag:

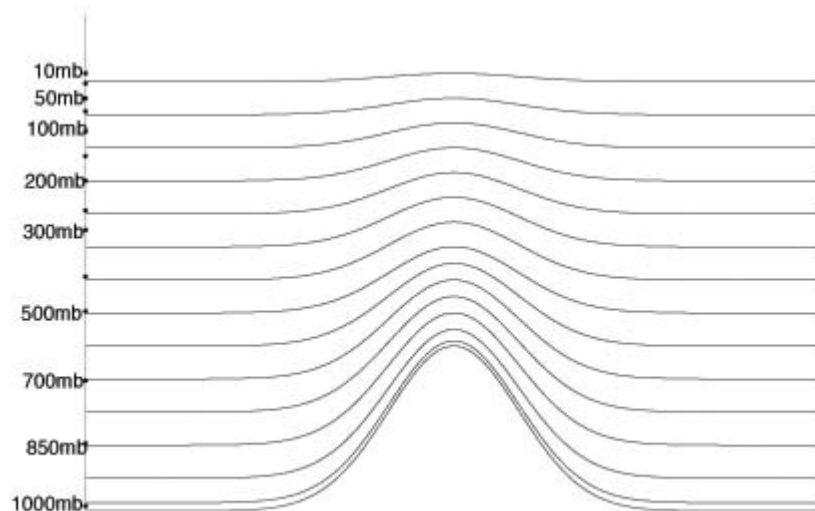
$$\frac{d q}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t_{\Theta}} + u_{\Theta} \frac{\partial q}{\partial x_{\Theta}} + v_{\Theta} \frac{\partial q}{\partial y_{\Theta}} + w_{\Theta} \frac{\partial q}{\partial \Theta} = \frac{1}{\rho} \frac{d M}{dt} , \quad \frac{p}{\rho} = RT .$$

## XI.4. A szigma-, az eta és a vegyes koordináta-rendszerek

A következő részben olyan koordináta-rendszereket vizsgálunk, amelyek a végtelen magasságú légkört az  $[1, 0]$  intervallumba képezik le. Ez a koordináta-transzformáció megkönnyíti a numerikus modellegyenletek megoldását. Egyszerűvé válik az egyenletek integrálása egy térben és időben ekvidisztáns rácson. A koordináta-rendszerek bemutatásánál a történelmi fejlődést követjük.

### XI.4.1. A Phillips-féle $\sigma$ -koordináta-rendszer

1957-ben N.A. Phillips amerikai meteorológus olyan koordináta-rendszert vezetett be, ami egyesíti magában a felszínkövető rendszer és a nyomási rendszer előnyeit. A végtelen vastagságú légkört az  $[1, 0]$  intervallumba képezi le (8. ábra).



8. ábra. A  $\sigma$ -koordináta-rendszer sematikus képe.

Egyszerűen megadható az alsó és a felső határfeltétel. Az új vertikális koordináta az adott szint nyomásának ( $p$ ) és a felszíni légnyomásnak ( $p_0$ ) a hányadosa.

$$\sigma = \frac{p}{p_0}.$$

Az  $(x_\sigma, y_\sigma, \sigma, t_\sigma)$  rendszer megengedi a nem hidrosztatikus vertikális mozgásegyenlet alkalmazását. Nem sérül a bijekció. Általában azonban – hasonlóan a nyomási rendszerhez – a  $\sigma$ -koordináta-rendszert a nagyskalájú légköri folyamatok leírásában alkalmazzák, ahol hidrosztatikus feltételezéssel élnek. Mi is ezeket az egyenleteket mutatjuk be.

Megjegyezzük, hogy a felszíni légnyomás a hely és az idő függvénye, vagyis  $p_0 = p_0(x_\sigma, y_\sigma, t_\sigma)$ . A légkör alsó határfelülete a  $\sigma = 1$ , a felső határa pedig  $\sigma = 0$  nívófelülettel adható meg. A  $\sigma$ -rendszerben a felszíni légnyomás prognosztikai változó.

Más szint nyomása nem szerepel az egyenletrendszerben, hiszen az már számítható adott  $\sigma$  szinten a felszíni nyomás ismeretében. A nyomási mezőt egy egyszerű diagnosztikai egyenlet adja meg:

$$p = \sigma p_0(x_\sigma, y_\sigma, t_\sigma) .$$

E felírásból következik, hogy a nyomás függőleges irányú ( $\sigma$  szerinti) megváltozása nem más mint a felszíni légnyomás.

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\partial[\sigma p_0(x_\sigma, y_\sigma, t_\sigma)]}{\partial \sigma} = p_0(x_\sigma, y_\sigma, t_\sigma) .$$

A nyomás  $\sigma$ -szerinti második deriváltja nulla.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial^2[\sigma p_0(x_\sigma, y_\sigma, t_\sigma)]}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial p_0(x_\sigma, y_\sigma, t_\sigma)}{\partial \sigma} = 0 .$$

Természetesen a  $\sigma$ -rendszerben is fennáll, hogy

$$x_\sigma = x, \quad y_\sigma = y, \quad t_\sigma = t, \quad u_\sigma = u, \quad v_\sigma = v .$$

A vertikális sebesség

$$w_\sigma = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\left(\frac{p}{p_0}\right)}{dt} = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{p_0^2} \frac{dp_0}{dt} = \frac{\omega}{p_0} - \frac{\sigma}{p_0} \omega_0$$

dimenziója [ $s^{-1}$ ].  $\sigma$ -rendszerben a légkör alsó és felső határa egy-egy nívófelület, ami e rendszerben áthatolhatatlan, ebből következik, hogy itt a vertikális sebesség is nulla.

$$w_\sigma(\sigma = 1) = \frac{d\sigma}{dt} = 0, \quad w_\sigma(\sigma = 0) = \frac{d\sigma}{dt} = 0 .$$

Az eddigiekhez hasonlóan írjuk fel a teljes időbeli derivált alakját:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_\sigma} + u_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma} + v_\sigma \frac{\partial}{\partial y_\sigma} + w_\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} .$$

A z-rendszerbeli és a  $\sigma$ -rendszerbeli vertikális sebességek közötti kapcsolat:

$$w_\sigma = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y} + w \frac{\partial \sigma}{\partial z} ,$$

illetve

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t_\sigma} + u_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_\sigma} + v_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y_\sigma} + w_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) .$$



Következő lépésként nézzük meg itt is a horizontális nyomási gradiens átírását! Kiindulási egyenletünk:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x_\sigma} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_\sigma}$$

Kihasználva, hogy  $p = \sigma p_0$ , vagyis  $\frac{\partial p}{\partial x_\sigma} = \sigma \frac{\partial p_0}{\partial x_\sigma}$  kapjuk, hogy

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma \frac{\partial p_0}{\partial x_\sigma} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_\sigma} = p \frac{\partial \ln p_0}{\partial x_\sigma} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_\sigma} .$$

Hasonló megfontolások után:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sigma \frac{\partial p_0}{\partial y_\sigma} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y_\sigma} = p \frac{\partial \ln p_0}{\partial y_\sigma} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y_\sigma} .$$

A horizontális mozgásegyenletek alakja, kihasználva, hogy  $\frac{p}{\rho} = RT$  :

$$\frac{d u_\sigma}{d t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_\sigma} - RT \frac{\partial \ln p_0}{\partial x_\sigma} + f_{v_\sigma} - l \left( \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t_\sigma} + u_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_\sigma} + v_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y_\sigma} + w_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) \right) + F_{sx_\sigma} ,$$

$$\frac{d v_\sigma}{d t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y_\sigma} - RT \frac{\partial \ln p_0}{\partial y_\sigma} - f_{u_\sigma} + F_{sy_\sigma} .$$

A kontinuitási egyenlet átírásakor a  $\frac{\partial p}{\partial \sigma} = p_0(x_\sigma, y_\sigma, t_\sigma)$  derivált – vagyis a talajszinti légnyomás – teljes időbeli változására kapunk egyenletet. A változás oka a  $\sigma$ -rendszerbeli sebesség divergenciája.

$$\frac{d p_0}{d t} = - p_0 \left( \frac{\partial u_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial w_\sigma}{\partial \sigma} \right) ,$$

illetve

$$\frac{\partial p_0}{\partial t_\sigma} = - p_0 \left( \frac{\partial p_0 u_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial p_0 v_\sigma}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial p_0 w_\sigma}{\partial \sigma} \right) .$$

Formailag nem változik a termodinamikai egyenlet, a nedvességszállítási egyenlet és az állapotegyenlet alakja sem:

$$\frac{d \Theta}{d t} = \frac{\partial \Theta}{\partial t_\sigma} + u_\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x_\sigma} + v_\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial y_\sigma} + w_\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} \frac{d Q}{d t} ,$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t_\sigma} + u_\sigma \frac{\partial q}{\partial x_\sigma} + v_\sigma \frac{\partial q}{\partial y_\sigma} + w_\sigma \frac{\partial q}{\partial \sigma} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt},$$

$$\frac{p}{\rho} = RT.$$

A hidro-termodinamikai egyenletrendszerben szerepel a  $w_\sigma = \dot{\sigma}$  vertikális sebesség. Meghatározáshoz diagnosztikai egyenletet használunk. Nézzük meg ennek előállítását! Kiindulási egyenletünk a  $\sigma$ -rendszerbeli kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial p_0}{\partial t_\sigma} = - \left( \frac{\partial p_0 u_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial p_0 v_\sigma}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial p_0 w_\sigma}{\partial \sigma} \right).$$

Integráljuk az egyenletet a teljes légoszlopra!

$$\int_{\sigma=1}^{\sigma=0} \frac{\partial p_0}{\partial t_\sigma} d\sigma = -1 \frac{\partial p_0}{\partial t_\sigma} = - \int_{\sigma=1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 u_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial p_0 v_\sigma}{\partial y_\sigma} \right) d\sigma - \int_{\sigma=1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 w_\sigma}{\partial \sigma} \right) d\sigma.$$

Kihasználva, hogy

$$\int_{\sigma=1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 w_\sigma}{\partial \sigma} \right) d\sigma = [(p_0 w_\sigma) |_{\sigma=0} - (p_0 w_\sigma) |_{\sigma=1}] = 0 \quad (\text{hiszen } w_\sigma(\sigma=1) = w_\sigma(\sigma=0) = 0),$$

kapjuk a

$$- \frac{\partial p_0}{\partial t_\sigma} = - \int_{\sigma=1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 u_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial p_0 v_\sigma}{\partial y_\sigma} \right) d\sigma$$

összefüggést. Következő lépésként ismét integráljuk a kontinuitási egyenletet, de most már csak a  $\sigma_1$  szinttől a légkör felső határáig ( $\sigma = 0$ )!

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma=0} \frac{\partial p_0}{\partial t_\sigma} d\sigma = - \sigma_1 \frac{\partial p_0}{\partial t_\sigma} = - \int_{\sigma_1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 u_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial p_0 v_\sigma}{\partial y_\sigma} \right) d\sigma - \int_{\sigma_1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 w_\sigma}{\partial \sigma} \right) d\sigma$$

Kihasználva, hogy

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 w_\sigma}{\partial \sigma} \right) d\sigma = - p_0 w_\sigma(x_\sigma, y_\sigma, \sigma_1, t_\sigma)$$

és alkalmazva az előző egyenletet kapjuk, hogy

$$w_\sigma(x_\sigma, y_\sigma, \sigma_1, t_\sigma) = \frac{1}{p_0} \int_{\sigma_1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 u_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial p_0 v_\sigma}{\partial y_\sigma} \right) d\sigma - \frac{\sigma_1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t_\sigma} =$$

$$= \frac{1}{p_0} \int_{\sigma_1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 u_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial p_0 v_\sigma}{\partial y_\sigma} \right) d\sigma - \frac{\sigma_1}{p_0} \int_{\sigma=1}^{\sigma=0} \left( \frac{\partial p_0 u_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial p_0 v_\sigma}{\partial y_\sigma} \right) d\sigma.$$

A vertikális sebesség meghatározására szolgáló, más alakú diagnosztikai egyenletet kapunk, ha a  $\sigma$ -rendszerbeli kontinuitási egyenletet deriváljuk  $\sigma$  szerint és kihasználjuk, hogy  $\frac{\partial p_0}{\partial \sigma} = 0$ . Az új diagnosztikai egyenlet:

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial x_\sigma} (p_0 u_\sigma) + \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial y_\sigma} (p_0 v_\sigma) - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (p_0 w_\sigma) = 0.$$

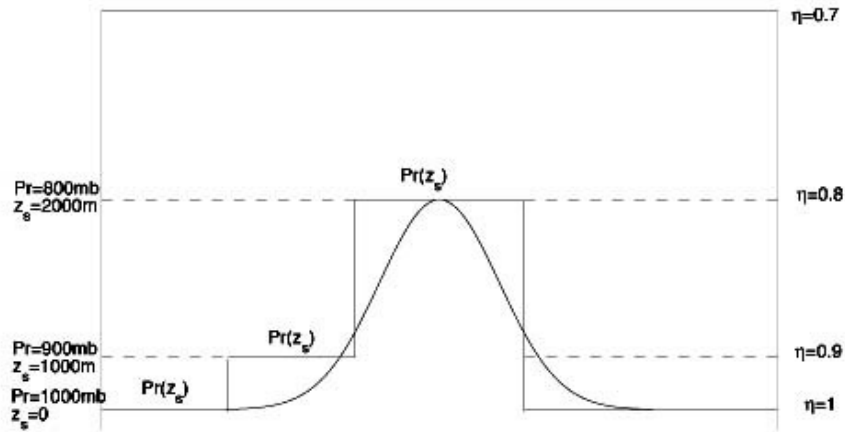
#### XI.4.2. Az $\eta$ -koordináta-rendszer

A  $\sigma$ -koordináta-rendszer ugyan az  $[1,0]$  intervallumba képezi le a légkört, és könnyű vele számolni, de problémát okoz a nyomási gradiens erő megadása tagolt hegyvidékeken a domborzat nagy lejtése miatt. Ezek a nehézségek a numerikus modellek rácsávolságának a növekedésével, a mezoskálájú modellek elterjedésével kerültek előtérbe. E problémák megoldására született az  $\eta$ -koordináta-rendszer 1984-ben. A Belgrádi Egyetem Meteorológiai Tanszékének professzora, Fedor Messinger és munkatársai által készített koordináta-rendszert mára elterjedten alkalmazzák a numerikus prognosztikában, egész „családja” alakult ki az  $\eta$ -koordinátázásnál.

Nézzük az eredeti vertikális koordinátázást, ami egyesíti a nyomási és a  $\sigma$ -rendszer előnyeit:

$$\eta = \frac{p - p_T}{p_{ref}(z=0) - p_T}.$$

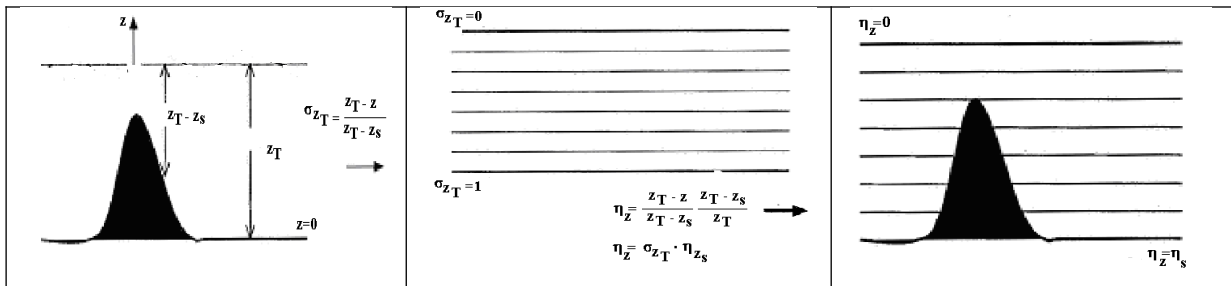
A definíciós egyenletben  $p$  a  $z$  szinten vett légnyomás,  $p_T$  a modell felső szintje, amit az egyszerűség kedvéért állandónak veszünk,  $p_{ref}(z=0)$  a tengerszintre vonatkozó referencia (átlagos) légnyomás. Megadhatnánk térben és időben változó felső határfeltételt is, de ez elbonyolítaná a modellezést, s a légköri folyamatok dinamikáját ismerve sincs sok értelme: megfelelő vastagságú légoszlopot kell választani pl. egy hegységen átkelő levegő modellezéséhez. A  $\sigma$ -felületekhez képes az  $\eta$ -felületek kvázihorizontálisnak tekinthetők. A modellekben az egyes  $\eta_i$  szintek  $z_i$  magassága előre megadott. Amikor a meteorológiai állapothatározók értékeit ábrázoljuk, akkor a felszínhez legközelebb eső  $\eta$ -szintre adjuk meg az adatokat. A hegyeket egy-egy lépcsős függvény adja meg (9. ábra).



9. ábra. Az  $\eta$ -koordináta-rendszer sematikus képe.

A fenti koordinátázás mintájára készíthetünk más hasonló rendszereket is. A nyomás helyett választhatjuk a  $Z$  magasságot (10. ábra) vagy a tömeg-koordinátát ( $\pi$ ):

$$\eta_z = \frac{z_T - z}{z_T - z_s} \frac{z_T - z_s}{z_T} = \sigma_{z_T} \eta_{z_s}, \quad \eta_\pi = \frac{\pi - \pi_T}{\pi_{ref}(z=0) - \pi_T}$$



10. ábra. Átmenet, a  $z$ - a  $\sigma_{z_T}$ - és az  $\eta_z$ -koordinátázás között. Ilyen koordináta-rendszert használnak a globális óceánmodellek is.

Az  $\eta$ - és a  $\sigma$ -rendszer különbségét szemléletesen mutatja az

$$\eta = \frac{p - p_T}{p_s - p_T} \eta_s \equiv \sigma_T \cdot \eta_s, \quad \eta_s = \frac{p_{ref}(z_s) - p_T}{p_{ref}(z=0) - p_T}$$

koordinátázás is. A  $\sigma_T$ -koordináta-felületek a felszín közelében közel párhuzamosan futnak a domborzattal. Ezt „egyenesíti ki” a felszín relatív magasságát jelző  $\eta_s$  tag. A korrekció menetét, a kvázi-horizontális  $\eta$ -koordináta-felület előállítását mutatja a 11. ábra.

### XI.4.2.1. A kormányzóegyenletek alakja az $\eta$ -rendszerben

Az eddig vizsgált vertikális koordinátázásokhoz hasonlóan építjük fel az egyenleteket. Hidrosztatikus modellközelítéssel foglalkozunk. A kontinuitási egyenletben itt is a felszíni nyomás szerepel.

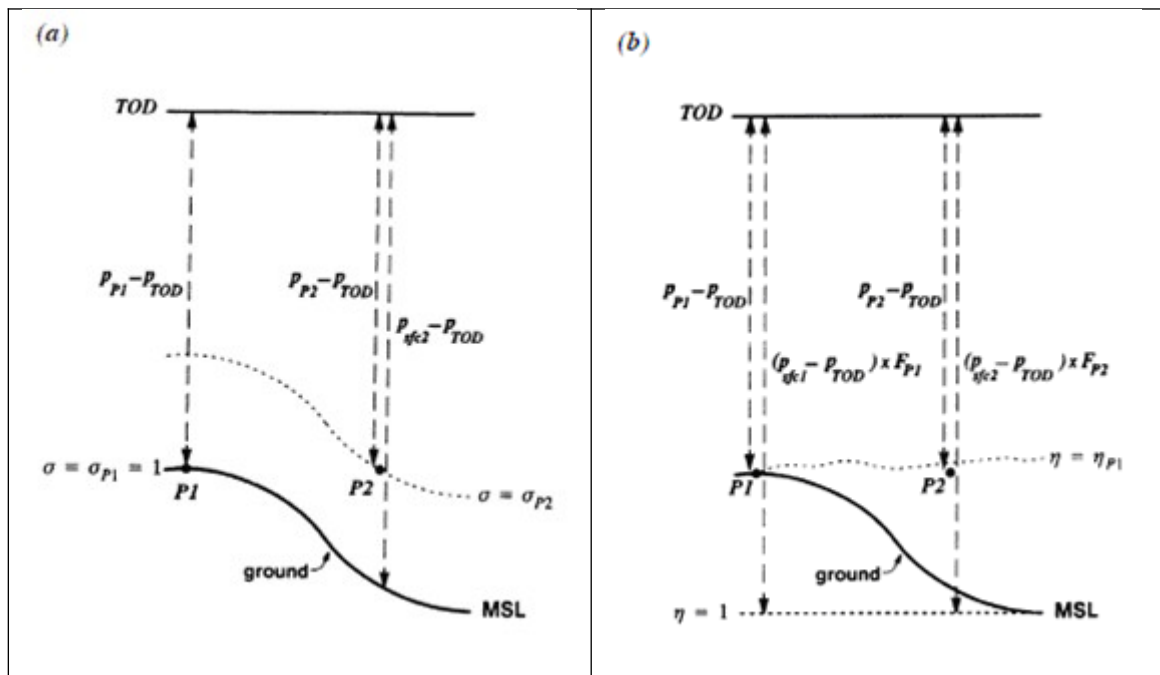
A horizontális mozgásegyenletek:

$$\frac{du_\eta}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_\eta} + f v_\eta - l \left( \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t_\eta} + u_\eta \frac{\partial \Phi}{\partial x_\eta} + v_\eta \frac{\partial \Phi}{\partial y_\eta} + w_\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \right) \right) + \frac{1}{\rho} F_{s\eta},$$

$$\frac{dv_\eta}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_\eta} - f u_\eta + \frac{1}{\rho} F_{s\eta}.$$

A sztatika alapegyenlete:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta}.$$



9. ábra. Tekintsük a  $P_1$  pontot a felszínen, és a vele azonos magasságban levő  $P_2$  pontot a szabad légkörben. A  $s$ -felületek követik a domborzat futását (a), míg az  $\eta$ -koordináta-felületek kvázihorizontálisak.

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d p_s}{dt} = -p_s \left( \frac{\partial u_\eta}{\partial x_\eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial y_\eta} + \frac{\partial w_\eta}{\partial \eta} \right),$$

hiszen a  $\frac{\partial p}{\partial \eta}$  deriváltban csak a felszíni nyomás ( $p_s(x_\eta, y_\eta, t)$ ) szerepel:  $\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{p_s - p_T}{\eta_s}$ .

Formailag nem változik a *termodinamikai egyenlet*, a *nedvességszállítási egyenlet* és az *állapotegyenlet* alakja sem:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t_\eta} + u_\eta \frac{\partial\Theta}{\partial x_\eta} + v_\eta \frac{\partial\Theta}{\partial y_\eta} + w_\eta \frac{\partial\Theta}{\partial \eta} = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} \frac{dQ}{dt},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t_\eta} + u_\eta \frac{\partial q}{\partial x_\eta} + v_\eta \frac{\partial q}{\partial y_\eta} + w_\eta \frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt},$$

$$\frac{p}{\rho} = RT.$$

A vertikális sebesség meghatározására a  $\sigma$ -rendszerhez hasonló egyenleteket kapunk.

### XI.4.3. Hibrid koordináta-rendszerek

Hibrid koordináta-rendszerről beszélünk, ha különböző vertikális koordináták kombinációjaként állítjuk elő az új rendszert. Ilyen például az izobárikus-sigma rendszer. A felszín közelében a  $\sigma$ -rendszer, feljebb a nyomási rendszer a domináns. E közelítés pontosabbá teszi a horizontális nyomási gradiens erő leírását is. Gyakran alkalmazzák az izentrop-sigma rendszert is. Az alsóbb légrétegekben (így a határrétegben is) a  $\sigma$ -rendszer dominál, míg a szabad légkörben a potenciális hőmérséklet veszi át a vertikális koordinátázás szerepét. Itt már teljesül a potenciális hőmérséklet szigorúan monoton növekedése a magassággal. Az áramlás követi az izentrópok futását.

Számos numerikus modell használ hibrid-koordináta-rendszert, így az OMSZ-nál futtatott ALADIN modellrendszer is. Ismerkedjünk meg ezzel a  $\pi$ - $\sigma$  koordinátázással.

Az vertikális  $[1,0]$  intervallumba képező  $\eta$ -hibrid-koordináta felírásához a  $\pi$  hidrosztatikus nyomási (tömeg) koordináta-rendszerből indulunk ki:

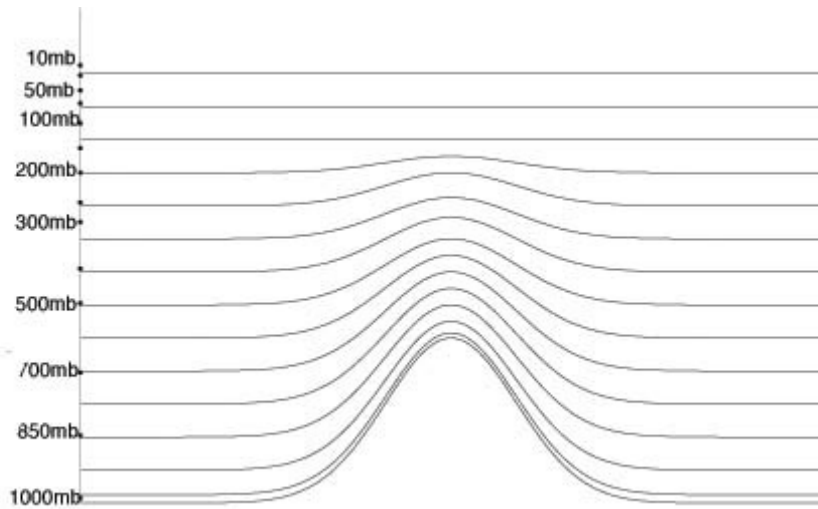
$$\pi(x_\eta, y_\eta, \eta_\eta, t_\eta) = A(\eta) + B(\eta) \cdot \pi_s(x_\eta, y_\eta, t_\eta).$$

Az  $A(\eta)$ ,  $B(\eta)$  függvény a következőképpen adható meg:

$$A(\eta) = \eta[(1 - g(\eta))\pi_s^0], \quad B(\eta) = \eta \cdot g(\eta),$$

ahol  $\pi_s^0 = \pi_s^0(t_\eta)$  a felszíni statikus nyomás területi átlaga, ami időfüggő változó. Ha egyszerűsíteni szeretnénk a koordináta-transzformációt, akkor az átlagos tengerszinti légnyomással  $\pi_s^0 = 1013,25$  hPa számolhatunk. A  $g(\eta)$  súlytényező a  $0 \leq g(\eta) \leq 1$  intervallumba esik. Ha  $g(\eta) = 1$ , akkor  $\sigma$ -koordináta-rendszerben ( $\eta = \pi/\pi_s$ ), míg

$g(\eta) = 0$  esetén normált tömeg-koordináta-rendszerben ( $\eta = \pi/\pi_s^0$ ) dolgozunk. A  $g(\eta)$  súlytényező vertikális profilját modellkísérletekkel állítják be.



10. ábra p- $\sigma$ -hibrid-koordináta-rendszer sematikus izovonalai.

Alkalmazhatunk logaritmikus hibrid koordináta-rendszert is:

$$\ln[\pi(x_\eta, y_\eta, \eta_\eta, t_\eta)] = A(\eta) + B(\eta) \cdot \ln[\pi_s(x_\eta, y_\eta, t_\eta)].$$

Ekkor természetesen más lesz a súlytényezők profilja.

*Megjegyezzük, hogy az észak-európai országok által fejlesztett HIRLAM modellben hasonló, p- $\sigma$  hibrid koordinátázást alkalmaznak. Ez adta az egyik lehetőséget az új generációs közös ALADIN-HIRLAM fejlesztéshez, de ez már nem a dinamikus meteorológia, hanem a numerikus prognosztika gyorsan fejlődő területe.*

Nézzük a hidro-termodinamikai egyenletrendszer új alakját! Az egyenletek formailag hasonlóak a tömeg ( $\pi$ ) koordináta-rendszerbelihez. A deriváltak transzformációjában lesz különbség.

A horizontális és a vertikális deriváltak új alakja:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_\eta} + \frac{\partial z}{\partial x_\eta} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x_\eta} - \frac{\partial \pi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \pi} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x_\eta} + \frac{\rho}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_\eta} + \frac{\partial z}{\partial y_\eta} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y_\eta} - \frac{\partial \pi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \pi} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial y_\eta} + \frac{\rho}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \pi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial \pi} \frac{\partial}{\partial \eta} = -g \frac{\rho}{m} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

ahol  $m = \frac{\partial \pi}{\partial \eta}$ . Az átírás bonyolult alakú, de könnyen érthetővé válik, ha a  $\frac{\partial}{\partial \pi} = \frac{\partial \eta}{\partial \pi} \frac{\partial}{\partial \eta}$  helyettesítésre gondolunk. Az egyenleteket – a változatosság kedvéért – egyszerűbb formában a horizontális sebesség  $\mathbf{v}_{\eta\eta} = (\mathbf{i}_\eta u_\eta + \mathbf{j}_\eta v_\eta)$  és a horizontális nabla operátor  $\nabla_{\eta\eta} = (\mathbf{i}_\eta \partial/\partial x_\eta + \mathbf{j}_\eta \partial/\partial y_\eta)$  segítségével írjuk fel.

$$\frac{d\mathbf{v}_{h\eta}}{dt} = -\frac{RT}{p}\nabla_{h\eta}p - \frac{1}{m}\frac{\partial p}{\partial\eta}\nabla_{h\eta}\Phi + f\mathbf{k}\times\mathbf{v}_{h\eta} - \mathbf{i}_{\eta}\cdot l\left(\frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dt_{\eta}}\right) + \frac{1}{\rho}F_{s\eta},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dt_{\eta}}\right)}{dt} = -g\left(1 - m\frac{\partial p}{\partial\eta}\right) - lu_{\eta} + \frac{1}{\rho}F_{s\eta}$$

$$\frac{dT}{dt_{\eta}} = \frac{RT}{c_p}\frac{1}{p}\frac{dp}{dt_{\eta}} + \frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt_{\eta}}, \quad \frac{dp}{dt_{\eta}} = \frac{c_p}{c_v}p\cdot D_3 + \frac{p}{c_v T}\frac{dQ}{dt_{\eta}}, \quad \frac{dq}{dt_{\eta}} = \frac{1}{\rho}\frac{dM}{dt_{\eta}}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = -\frac{m\cdot R\cdot T}{p},$$

$$D_3 = \nabla_{h\eta}\mathbf{v}_{h\eta} + \frac{1}{m}\frac{p}{RT}\nabla_{h\eta}\Phi\frac{\partial\mathbf{v}_{h\eta}}{\partial\eta} - \frac{g}{m}\frac{p}{RT}\frac{\partial w}{\partial\eta}, \quad w = \frac{1}{g}\frac{d\Phi}{dt_{\eta}}$$

$$\frac{d}{dt_{\eta}} = \frac{\partial}{\partial t_{\eta}} + \mathbf{v}_{h\eta}\nabla_{h\eta} + w_{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

## XI.5. Alkalmazások

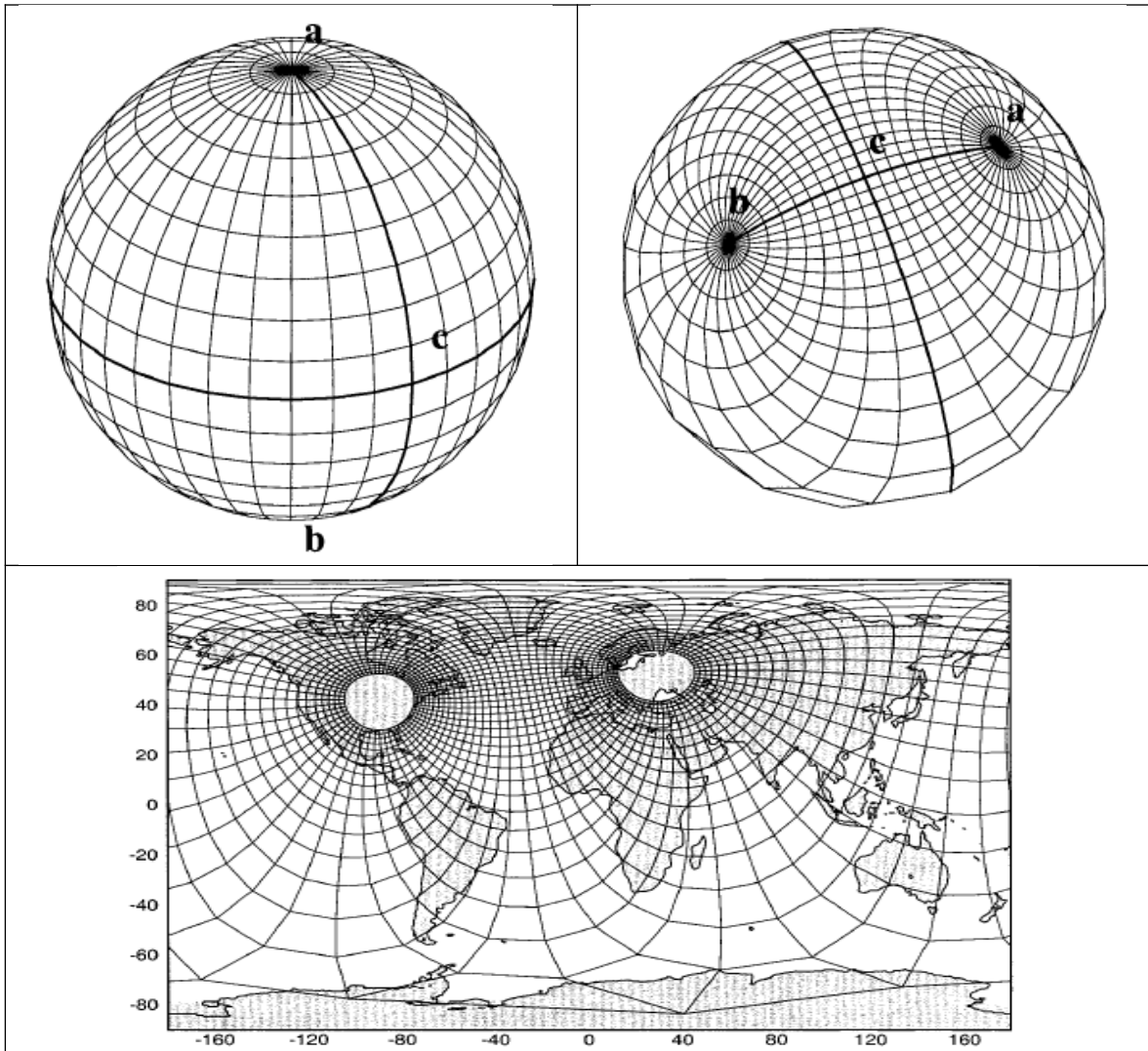
Áttekintettük a horizontális és vertikális koordinátázás kérdését. Bemutattuk a leggyakrabban használt koordináta-rendszereket. Röviden kitérünk a horizontális és a vertikális koordináta-választás kérdéseire, ismertetünk további – az előrejelzési feladattól függő – koordináta-rendszert. A fejezetet a koordináta-rendszerek összehasonlítása zárja. Bemutatjuk a legfontosabb előrejelzési modellekben használt vertikális koordinátázásokat is.

### XI.5.1. A horizontális koordinátázás néhány kérdése

A horizontális koordináta-választás során a térképsík feletti egyenletek levezetésére koncentráltunk. Azt, hogy milyen vetületet használunk, a modellezni kívánt folyamat határozza meg. Globális modellekben az elvi problémát az jelenti, hogy a szférikus rendszerben az északi és a déli póluson nem őrzi meg a kordinátázás a folytonosságát szakadási ponttal (szingularitás) kell számolni. Ebből az következik, hogy a sarkokon a hidro-termodinamikai egyenletrendszer szférikus irány-egységvektorok szerinti felbontása is értelmetlenné válik. A pólusokhoz közeledve a  $tg\varphi$ -t tartalmazó metrikus gyorsulási tagok lesznek a legnagyobb nagyságrendűek, ami lehetetlenné teszi az előrejelzési feladat megoldását. *(Az előrejelzési feladat megoldása nem más, mint a légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer megoldása adott kezdeti és peremfeltételek esetén egy 3D*



rácson valamilyen numerikus módszerrel, pl.: véges különbséges, végeelem, pseudo-spektrális, spektrális.)



11. ábra. A pólusok áttanszformálása a gömbön az északi félgömb poláris óceáni áramlásának modellezésére globális óceáni cirkulációs modellben (fent) és az óceáni modell rácsfelbontása Mercator-vetület alkalmazásával módosított pólusok esetén. A pólus körüli területeket kihagytuk az óceáni modell rácsfelbontásának a bemutatásánál. (Bensten et al. 1998 alapján).

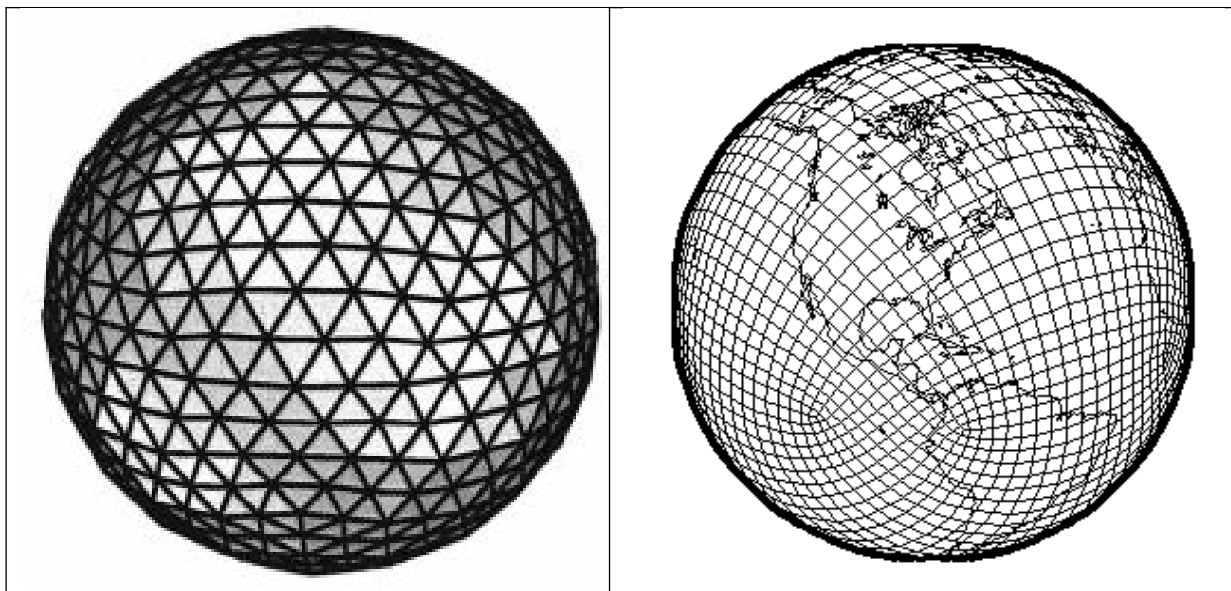
Milyen lehetőségek vannak a szingularitási probléma kiküszöbölésére?

- Az előrejelzési feladatot nem a földfelszín felett oldjuk meg, hanem térképsík felett dolgozunk. Ez megoldást jelent beágyazott regionális modellek esetén, de nem oldja meg a problémát globális modelleknél.
- Globális óceáni modellek esetén áttanszformálhatjuk a két pólust olyan helyre, ahol a modell szempontjából kevésbé fontos a számítási pontosság. A két pólus most szárazföld

felett lesz, majd az átranzformált gömböt kivetítjük a térképsíkra. A térképsíkra történő vetítésnél elterjedten alkalmazzák a Mercator-féle vetületet, biztosítva a konform leképezést. E kettős koordináta-transzformációt szemlélteti a 11. ábra. Ez a technika természetesen alkalmazható beágyazott regionális légköri modellek esetén is.

- Ha az előrejelzési feladatot spektráltérben oldjuk meg Fourier-sorfejtés alkalmazásával (poláris Fourier-szűrű), akkor a globális modellekben is kiküszöbölhető a pólusszingularitás hatása. Itt a probléma a pólus környéki sűrű rácsfelbontás és az ebből adódó kis tér- és időlépcső alkalmazása, vagyis a nagy számítógépkapacitás.

A konform leképezéssel kapott közel azonos gömbi rácsfelbontás – legyen az háromszög, vagy négyzetes, esetleg sokszög – kiküszöböli a szférikus koordináta-rendszer alkalmazását (12. ábra). Ez a szingularitási probléma elegáns megoldása, ami az 1970-es évek elején vetődött fel, de csak az 1980-as, 90-es években terjedt el a számítástechnikai lehetőségek bővülésével.



12. ábra. Háromszög-, illetve kvázi-négyzetes gömbi rácsfelbontás.

## XI.5.2. További magassági koordinátázások

Gazdag tárháza van a különböző vertikális koordinátáknak. Ezt indokolja a modellek (tér- és időbeli felbontás, az alkalmazott numerikus modell) sokszínűsége.

A határréteg modellezésében gyakran alkalmazzák a logaritmusos magassági skálát

$$(\xi = \ln z, z \geq (d + z_0)),$$

ilyenkor a légkör alsó határát a felszínborítottságtól függő  $d$  kiszorítási rétegvastagság (az „emelt felszín” magassága) és a  $z_0$  érdességi magasság határozza meg. A modellbeli szélesség a  $(d + z_0)$  szinten válik nullává. A  $d$  értéke a tereptárgyak (növényzet,

épületek) átlagos magasságának hozzávetőlegesen 2/3-a. Az érdességi magasság a felszín típusától, borítottságtól, érdességétől függ. Víz felett mm-es, vagy az alatti (itt  $d = 0$ ), míg nagyvárosok, felett 1-2 m-es nagyságú.

Az  $\eta$  koordináta-rendszerhez hasonló a

$$\zeta = z_T \frac{z}{H} + z_s \frac{H - z}{H}$$

vertikális koordináta, ahol  $z_s$  a felszín,  $z_T$  a modell felső szintjének a magassága, míg a  $H$  egy normáló konstans.  $\zeta$  értéke  $z_s$  és  $z_T$  közötti.

A fenti koordinátázást tovább lehet árnyalni, ha a felszín alakját egy nagy skálájú domborzati modell ( $z_{s1}$ ) és egy lokális domborzati korrekciós adatbázis ( $z_{s2}$ ) alapján állítjuk össze. Ez a felszíni hatások szétválasztásánál lehet hasznos. Az új vertikális koordináta:

$$\zeta = z_T \frac{z}{H} + z_{s1} \frac{\sin h[(H - z)/s_{s1}]}{\sin h(H/s_{s1})} + z_{s2} \frac{\sin h[(H - z)/s_{s2}]}{\sin h(H/s_{s2})},$$

ahol  $s_{s1}$  és  $s_{s2}$  a két vertikális felbontási tényező. A vertikális koordinátázásban figyelembe vettük a domborzat magasságát és horizontális tagolódását. Az állandókat numerikus kísérletekkel lehet optimalizálni.

E két koordináta jól mutatta a feladattól függő vertikális koordinátázás jelentőségét. A szakirodalomban további példát is találhatunk.

### XI.5.3. Az Exner-függvény

Mezokálájú modellekben (hidrosztatikus és nem-hidrosztatikus esetben) elterjedten alkalmazzák az

$$\zeta = c_p (p/p_0)^{R/c_p}$$

koordináta-rendszert is, amit  $\Pi$ -vel jelölnek (itt a  $\Pi$  az Exner-függvény).  $p_0$  jelöli az 1000 hPa-os standard nyomási szintet. Egyszerűvé válik a potenciális hőmérséklet felírása:  $\Theta = c_p T / \Pi$ . Ha nedves levegővel dolgozunk, akkor  $\Theta$  helyett a virtuális potenciális hőmérséklettel ( $\Theta_v$ ) kell számolnunk.

Az Exner-függvény alkalmazásával az eredeti  $z$ -rendszerben is leegyszerűsödnek az egyenletek. Most ezzel foglalkozzunk!

A termodinamikai egyenlet is leegyszerűsödik:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{\Pi} \frac{d\Pi}{dt}.$$

Leegyszerűsödik a Navier–Stokes-egyenletek alakja. Ezt vektoriális formába írva:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\Theta \cdot \nabla \Pi - \mathbf{k} \cdot \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}_s.$$

Az Exner-függvény teljes időbeli deriváltja és az állapotegyenlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{d \ln \Pi}{dt} = \frac{R}{c_p} \frac{d \ln p}{dt} = \frac{R}{c_p} \left( \frac{d \ln \rho}{dt} + \frac{d \ln T}{dt} \right).$$

Ennek felhasználásával a kontinuitási egyenlet új alakja:

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \Theta + \left( 1 - \frac{c_p}{R} \right) \ln \Pi \right) = \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

ami tovább alakítható:

$$\frac{c_v}{R\Pi} \frac{d\Pi}{dt} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{\Pi} \frac{dQ}{dt}.$$

A nyomásváltozás a sebesség divergenciájától (összenyomás, kitágulás) és a nem adiabatikus hőközléstől függ.

A  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  sebesség, a  $\Pi$  Exner-függvény, a  $\Theta$  potenciális hőmérséklet zárt rendszert alkot, amit kiegészíthetünk a nedvességszállítási egyenlettel. Az állapotegyenletre külön nincs szükségünk. Ez beleépült a kontinuitási egyenlet transzformálásába.

Az Exner-függvény önmagában is fontos a klasszikus dinamikus meteorológiában. Adiabatikus feltételezés mellett leegyszerűsíti a  $z$ -rendszerben felírt légköri hidrodinamikai egyenletrendszer.

#### **XI.5.4. A leggyakrabban használt vertikális koordinátázások ( $\sigma$ , $\eta$ , $\Theta$ , hibrid) összehasonlítása**

A meteorológiában a két természetes vertikális koordináta a magasság és a nyomás. Gondoljunk csak a rádiószondás felszállások feldolgozására, a repülésmeteorológiában alkalmazott 2D térbeli metszetekre, vagy a szinoptikus gyakorlatban használt abszolút és relatív topográfiai térképekre.

##### **XI.5.4.1. A $z$ - és a $p$ -rendszer korlátai**

A numerikus modellezés hőskorában elterjedten alkalmazták a  $p$ -rendszert. A nemhidrosztatikus modellekben, illetve a lokális skálájú meteorológiai és áramlástanai modellekben elterjedten alkalmazzák a  $Z$ , illetve a  $z^*$  koordinátázást. A felszínközeli áramlási kép leírása, a változó alsó határfeltétel kérdése a nyomási rendszerben, vagy a rácshálózat konstruálása számos problémát vet fel. Nehézséget okoz az is, hogy a felszín közelében az áramlás követi a felszínt, míg nagy magasságban a légrések jó közelítéssel az izentrópok mentén mozognak. Ezért sem terjedt el e két koordinátázás a mai operatív futó időjárás-előrejelző, illetve globális éghajlati modellekben. Leggyakrabban használt vertikális koordinátázás a  $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $\Theta$ , és a hibrid. Nézzük meg és vessük össze ezek előnyeit és hátrányait.

### XI.5.4.2. A $\sigma$ -rendszer

A  $\sigma = p/p_s$  koordináta-rendszer a végtelen magasságú légkört az  $[1, 0]$  intervallumba képezi. Könnyű benne számolni, egyszerűen megadható az alsó határfeltétel (nincs vertikális sebesség). A felszín közelében követi a domborzat futását, és ekvidisztans felbontás esetén a rétegvastagság a felszín felett kisebb, ami különösen előnyös a határréteg folyamatainak (turbulencia, légköri stabilitás, határréteg-vastagság alacsony szintű jet) modellezésében. Sík, illetve kis hajlással rendelkező domborzat esetén jól számolható a nyomási gradiens erő (így a szélmező) és az advekción.

Hátránya, hogy az erősen változó domborzat (hegységek) esetén pontatlan a horizontális nyomási gradiens erő, így a sebesség becslése. Szintén problémát okoz a felszínkövető rendszer olyankor is, amikor a légáramlás nem követi a felszínt. Gondoljunk csak a lee-oldali ciklogenezisre, vagy a Kárpát-medencében levő hideg légpárna helyzetre, amikor a hegységen átkelő levegő hideg légtömeg felett „csúszik el”. Hasonló probléma lép fel a hegyekkel szegélyezett tengerparti területeken, gondoljunk csak az Adriai-tengerre.

### XI.5.4.3. Az $\eta$ -rendszer

A  $\sigma$ -rendszerhez hasonlóan az  $[1, 0]$  intervallumba képezi le a légkört, de a referencia a tengerszintű légnyomás (vagy a sztatikus nyomás). A domborzatot egyszerű lépcsős függvényként veszi figyelembe, ami megkönnyíti a számítást, de a  $\sigma$ -rendszerhez képest bonyolultabbá válik a modell alsó határfeltétele. A horizontális modellszintek közel párhuzamosak a nyomási (és a magassági) szintekkel, így pontosabban számítható a horizontális nyomási gradiens, az advekción és a sebességi mező. Jól számolható a horizontális divergencia, így jobban előrejelezhetők a határréteg folyamatai. Jobb eredményeket szolgáltat az inverziós helyzetek és a hegyen átkelő levegő mozgásának előrejelzésben is, mint a  $\sigma$ -modell.

Nehézséget okoz a lépcsős függvényként leírt domborzat a határréteg modellezésében, különösen hegyvidéki területeken. Hegyvidéki területeken csak sűrű térbeli rácsszerkezet alkalmazásával lehet megfelelő módon figyelembe venni a domborzatot. A koordinátázás tulajdonságából adódik, hogy a hegyekről lefutó erős lee-oldali viharokat is pontatlanul modellezi.

### XI.5.4.4. A $\Theta$ -rendszer

A potenciális hőmérsékleti koordináta-rendszer önmagában nem alkalmas vertikális koordinátának a numerikus modellekben. Analízismezők készítésében, légpálya számításban azonban jól alkalmazható. A konvektív folyamatokban, a határréteg modellezésében nem teljesül a szigorú monotonitás a magassággal. A szabad légkörnek viszont sajátja a stabilitás, a magassággal növekvő potenciális hőmérséklet. Itt a légrések az izentrop (állandó entrópiájú) felületek mentén mozognak. A potenciális hőmérséklet mint változó a hibrid koordinátarendszerekben nyer értelmet.

A  $\Theta$ -rendszerben könnyű és pontosan lehet modellezni a potenciális örvényességi mezőt, ami itt megmaradó mennyiség. Az izentrop potenciális örvényesség meghatározó szerepet játszik (kiváló indikátora) a szinoptikus rendszerek fejlődésének. Fontos egyszerűsítő feltétel, hogy adiabatikus folyamatok során nincs vertikális sebesség, vagyis a

horizontális advekción jól modellezi a 3D légköri advekción folyamatokat. Erős baroklin zónákban nagy a potenciális hőmérséklet magasság szerinti változása, így a baroklin zónákban (frontok, jetek) és a tropopauza környékén finom térbeli felbontást tesz lehetővé. Jól leírható a horizontális és a vertikális szélnyírás és a hőmérsékleti mező aszimmetriája. A vertikális sebesség ismeretében direkt módon le tudjuk írni a nem adiabatikus hatásokat, elsősorban a felhőképződés során felszabaduló latens hőt.

A korlátozó tényezők között a határreteg modellezése mellett nehézséget okoz az alsó határfeltétel kérdése. A potenciális hőmérséklet jellegzetes napi menettel rendelkezik, és az izentropok metszik a felszínt, ellentétben a  $\sigma$ -rendszerrel. A szárazadiabatikus közeli hőmérsékleti gradiens esetén gyenge a modell vertikális felbontása, a potenciális hőmérséklet alig változik a magassággal. E probléma numerikus megoldása a vertikális átrétegződés, úgy, hogy továbbra is teljesüljenek a megmaradási tételek.

#### XI.5.4.5. Hibrid koordináta-rendszerek

A hibrid koordináta-rendszer két rendszer kombinációjából áll össze. Az áramlást követve az alsóbb rétegekben egy felszínkövető rendszert ( $z^*$ ,  $\sigma$ ), a magasabb rétegekben a geopotenciál-felületekkel közel párhuzamos ( $z$ ,  $p$ ,  $\pi$ ,  $\Theta$ ) koordinátázást alkalmaznak. Leggyakrabban a  $p$ - $\sigma$ ,  $\pi$ - $\sigma$  (ALADIN, AROME, HIRLQAM) és  $\Theta$ - $\sigma$  (RUC) párosítást alkalmazzák. Nincs itt sem optimális megoldás. A tradíciók, a speciális igények alakítják a koordináta-választást.

A  $\Theta$ - $\sigma$  rendszer esetén előnyt jelent a jobb csapadékbecslés – a szabad légkörbeli  $w_\Theta$  előrejelzés pontossága miatt – a  $\sigma$ -rendszerhez képest. A határreteg folyamatainak modellezésében pedig kihasználja a tradicionális  $\sigma$  koordinátázás előnyeit. A  $\pi$  tömegkoordináta-rendszer alkalmazása szintén javítja csapadék-előrejelzés pontosságát; a statikus nyomás számtásánál figyelembe veszi a légköri kihullható víztartalom-változását.

Problémát jelent a kétfajta koordináta-rendszer közötti súlyozás megadása, különösen a 925–700 hPa-os rétegben. Gondoljunk csak a jellegzetes napi menetet mutató határreteg fejlődésére.

#### XI.5.4.6. Összefoglaló megjegyzések

A bemutatott koordináta-rendszerek alkalmazását és főbb tulajdonságai az 1. és a 2. táblázat foglalja össze. Nem törekedtünk a teljességre. Személetes példákat kerestünk a NOAA oktatási anyagára támaszkodva.

Közép- és hosszútávú előrejelzésekben és az éghajlati modellekben a  $\sigma$ ,  $\eta$  és a hibrid koordináta-rendszer terjedt el. Mezokálajú modellekben a vertikális koordinátázás széles skáláját alkalmazzák. A meteorológiai mezők analízisében, a légpályaszámításban (Lagrange-féle szemlélet) és a nowcasting-technikában a  $\Theta$  koordinátázásnak lehet egyre nagyobb szerepe.

|                       |                  |         |          |
|-----------------------|------------------|---------|----------|
| Vertikális koordináta | Numerikus modell | Előnyök | Korlátok |
|-----------------------|------------------|---------|----------|

|                                                    |                                           |                                                                         |                                                                                             |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\eta$                                             | Eta                                       | Hegységek feletti áramlási mező leírása                                 | Határréteg modellezés komplex domborzat felett                                              |
| Általános hibrid ( $\sigma$ -p, $\sigma$ - $\pi$ ) | ECMWF, NOGAPS, WRF, ALADIN, AROME, HIRLAM | A két vertikális koordinátázás optimális ötvözete                       | Alacsony szintű adiabatikus áramlási kép leírása                                            |
| $\Theta$ - $\sigma$ hibrid                         | RUC                                       | Baroklin területek (frontok, tropopauza) nagy érzékenység               | Az alsó légkörbeli adiabatikus és fázisátalakulási folyamatok, illetve a konvekció kezelése |
| $\sigma$                                           | AVN/MRF, NGM, MM5, WRF, RAMS              | A felszínkövető koordinátázás miatt a határréteg megbízható modellezése | Hegységek lee-oldali áramlási képének a modellezése                                         |

1. táblázat. Az egyes vertikális koordináták alkalmazásának főbb előnyei és hátrányai.

| Feltétel                          | $\sigma$                         | $\eta$    | $\Theta$   | hibrid $\Theta$ - $\sigma$ | hibrid $p$ - $\sigma$ , $\pi$ - $\sigma$ |
|-----------------------------------|----------------------------------|-----------|------------|----------------------------|------------------------------------------|
| Bijekció                          | Teljesül                         | Teljesül  | Nem mindig | Teljesül                   | Teljesül                                 |
| Konzervatív mennyiségek megőrzése | Kielégítő                        | Kielégítő | Kiváló     | Jó                         | Jó                                       |
| Nyomási gradiens erő pontossága   | Nem megfelelő (hegységek felett) | Kiváló    | Jó         | Jó                         | Jó                                       |

2. táblázat. Az egyes vertikális koordináták főbb sajátosságai.