XV. A potenciális örvényesség

XV.1. *Az örvényességi egyenlet vektoriális alakja*

Mielőtt a potenciális örvényességgel foglalkoznánk, érdemes az örvényességi egyenletet teljesen általános, vektoriális formában is felírni.

Induljunk ki a Descartes-rendszerben felírt mozgásegyenletek vektoriális alakjából:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{v}\times 2\boldsymbol{\Omega} + \nabla\Phi + \mathbf{F}_s \text{ , ahol}$$

$\Phi = gz$, és $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ nehézségi gyorsulás vektora. A további átalakításoknál kihasználjuk, hogy

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{v}|^2 + (\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}\,.$$

Vezessük le a fenti kifejezést! Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két vektor! Tekintsük az

$$\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \nabla_b(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \nabla_a(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

vektoranalitikai összefüggést, amelyben a ∇_a és ∇_b operátor indexe arra figyelmeztet, hogy a nablát mint differenciáloperátort csak az indexben jelölt vektorra kell alkalmazni. Vegyük az azonosságból $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$ választással adódó

$$2\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = \nabla(\mathbf{v}^2) - 2(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$$

összefüggést, fejezzük ki belőle $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$-t, és helyettesítsük be a mozgásegyenletbe. Használjuk fel továbbá, a relatív örvényesség $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{v}$ definícióját. Ezzel a mozgásegyenlet a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(2\mathbf{\Omega}+\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\nabla\left(\Phi-\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)+\mathbf{F}_s \ .$$

alakra hozható. Az örvényességi egyenlet előállításához szorozzuk meg a mozgásegyenletet balról vektoriálisan a nabla operátorral. Eredményül a

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\nabla\times\left[(2\mathbf{\Omega}+\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{v}\right]=-\nabla\times\frac{\nabla p}{\rho}+\nabla\times\mathbf{F}_s$$

összefüggés adódik. Mivel

$$\nabla\times\frac{\nabla p}{\rho}=\frac{1}{\rho}\nabla\times\nabla p+\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\nabla p=-\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p \ ,$$

az örvényességi egyenlet a

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\nabla\times\left[(2\mathbf{\Omega}+\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{v}\right]=\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}+\nabla\times\mathbf{F}_s \ .$$

alakban írható fel.

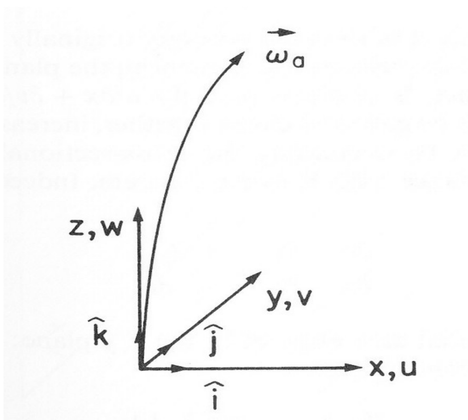
Bevezetve az abszolút rendszerbeli $\boldsymbol{\omega}_a=\boldsymbol{\omega}+2\mathbf{\Omega}$ rotációt, az egyenlet tovább alakítható. Az egyenlet bal oldalán a kettős vektorszorzatot a

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\nabla_a\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\nabla_b\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b}\cdot\nabla)\,\mathbf{a}-\mathbf{b}\nabla\cdot\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{b}+\mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{b} \ .$$

azonosság alapján az $\mathbf{a}=\boldsymbol{\omega}_a$ és $\mathbf{b}=\mathbf{v}$ helyettesítéssel átalakítva kapjuk a

$$\nabla\times\left[\boldsymbol{\omega}_a\times\mathbf{v}\right]=(\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}_a+\boldsymbol{\omega}_a\nabla\cdot\mathbf{v}-(\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla)\,\mathbf{v}$$

kifejezést. Itt a bal oldalon csak három tag szerepel. Ez érthető, hiszen a teljes abszolút rotáció divergenciája miatt a $\mathbf{v}\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}_a$ tag zérus.



1. ábra. Lokális koordináta-rendszer az örvényességi egyenlet interpretálásához. Pedlosky, J., 1986: Geophysical Fluid dynamics. 35 p.

A teljes örvényesség időbeli megváltozását megadó örvényességi egyenlet általános alakja tehát:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_a}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\omega}_a(\nabla\cdot\mathbf{v}) + (\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2} + \nabla\times\mathbf{F}_s\,.$$

Az egyenlet jobb oldalán álló négy tag szabja meg az abszolút rotációvektor teljes időbeli megváltozását. Ezek rendre a divergencia-, a szélnyírási, a szolenoidális és a súrlódási tag.

Az örvényességi egyenlet kissé még tovább alakítható a $\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\nabla\cdot\mathbf{v}$ kontinuitási egyenlet segítségével. Szorozzuk be az örvényességi egyenletet $\frac{1}{\rho}$-val, és a jobb oldal első tagjában a sebesség divergenciáját helyettesítsük be a kontinuitási egyenletből, s ezt a tagot vigyük át az egyenlet bal oldalára:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_a}{\mathrm{d}t} - \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}\nabla\times\mathbf{F}_s\,.$$

Észrevehetjük, hogy a bal oldalon éppen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\right)$ áll, az örvényességi egyenlet tehát a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}\nabla\times\mathbf{F}_s$$

alakban is felírható.

XV.2. *A potenciális örvényesség megmaradásának származtatása*

Kelvin cirkulációs tétele általános megállapítást tesz az örvényesség megmaradásáról, azonban a cirkuláció globális fogalom, ezért a megmaradási tétel nem illeszkedik a lokális mozgásegyenletekhez. További problémát jelent, hogy a Kelvin-tétel csak barotrop áramlás esetén érvényes.

A következőkben tárgyalandó potenciális örvényességre vonatkozó tétel a Kelvin-elmélet mindkét hiányosságát kiküszöböli, és olyan lokális megmaradási elvet képez, amely mind a meteorológiában, mind az általános geofizikai áramlástanban rendkívül hatékonyan alkalmazható.

A potenciális örvényesség megmaradásának tételét Rossby mutatta meg, majd Ertel általánosította. A tétel azon a felismerésen alapul, hogy az áramlás tulajdonságai követhetők az áramlással advektálódó skalármező nyomon követésével. Baroklin áramlás esetén a skalármező nem választható tetszőlegesen (a mező csak a nyomás és a sűrűség függvénye lehet), barotrop áramlás esetén azonban ilyen korlátozás nem áll fenn. A skalármező fejlődése összekapcsolható az örvényességi egyenlettel, és a kettő kombinációjaként skaláris megmaradási tétel származtatható. Ez lesz a potenciális örvényességi tétel.

A következőkben a potenciális örvényességi tételt fontossága miatt többféleképpen is származtatjuk, majd kitérünk néhány légkördinamikai alkalmazására.

XV.2.1. *A Kelvin-tétel és a potenciális örvényesség*

XV.2.1.1 Barotrop eset

Barotrop áramlásban a Kelvin-féle cirkulációs tétel az infinitezimális δA felületelemre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{n}\delta A) = 0$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{n}$ a δA felületelem normális irányú egységvektora.

Válasszunk a Kelvin-tételben olyan felületet, amely a χ skalármennyiség izofelületén fekszik. Ekkor $\mathbf{n} = \frac{\nabla\chi}{|\nabla\chi|}$. Legyen a skalármennyiség a materiális térfogatelemeken megmaradó, azaz legyen $\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = 0$.

Válasszunk ki a χ két δh távolságú izofelülete között elhelyezkedő, a δA felületelemre épülő $\delta V = \delta A \cdot \delta h$ térfogatelemet. Ezzel:

$$\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{n}\delta A = \boldsymbol{\omega}_a \cdot \frac{\nabla\chi}{|\nabla\chi|}\frac{\delta V}{\delta h}.$$

A két felület közötti távolság kifejezhető a $\delta\chi = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla\chi = \delta h|\nabla\chi|$ összefüggésből, és a Kelvin-tétel felírható az

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\chi\delta V}{\delta\chi}\right) = 0$$

alakban. Mivel χ megmaradó mennyiség, $\delta\chi$ és $\rho\delta V$ is az, tehát kihozhatók a deriválás alól. Következésképpen:

$$\frac{\rho\delta V}{\delta\chi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\chi}{\rho}\right) = 0,$$

amiből

$$P_\chi = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\chi}{\rho} = const.$$

Ez a potenciális örvényesség megmaradásának tétele barotrop folyadékra. Látható, hogy a χ mennyiség választásától függően többféle potenciális örvényesség is definiálható.

XV.2.1.2 A baroklin eset

Általános esetben a Kelvin-féle cirkulációs tétel az elemi felületre a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{n}\delta A) = -(\nabla\alpha \times \nabla p)\cdot\mathbf{n}\delta A = -(\nabla S \times \nabla T)\cdot\mathbf{n}\delta A$$

alakban írható fel, mert általános esetben a cirkuláció meghatározásakor a szolenoidális tag nem tűnik el.

Megtehetjük azonban, hogy a felületet úgy választjuk, hogy a jobb oldali szorzat (a szolenoidális tag) zérus legyen. Ez akkor következik be, ha $\mathbf{n}$ merőleges a keresztszorzatra. A szolenoidális tag eltüntetésére tehát minden olyan skalármennyiség izofelülete alkalmas, amelyre $\chi = \chi(\alpha, p)$ vagy $\chi = \chi(S, T)$, hiszen $\mathbf{n} \sim \nabla\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\nabla\alpha + \frac{\partial\chi}{\partial p}\nabla p$ illetve $\mathbf{n} \sim \nabla\chi = \frac{\partial\chi}{\partial S}\nabla S + \frac{\partial\chi}{\partial T}\nabla T$.

Legegyszerűbben a keresztszorzat eltűnése akkor teljesül, ha az elemi felületet izobár ($p = const$) vagy izoszter ($\alpha = const$), illetve izentrop ($S = const$) vagy izoterm ($T = const$) felületen vesszük fel.

A szolenoidális tag eltűnésének követelménye természetesen korlátozást jelent a potenciális örvényességbe beépíthető χ skalármennyiségre, és mivel χ-nek materiálisan megmaradó mennyiségnek is kell lennie, az áramlás követésére alkalmas skalárok kiválasztására kevés lehetőségünk marad. A kézenfekvően választható p, α, S, T mennyiségek közül materiális invariánsként csak az S fajlagos entrópia jöhet szóba.

A meteorológiában a fajlagos entrópia helyett a vele egyenértékű potenciális hőmérsékletet szokás használni, így baroklin esetben a potenciális örvényesség tétele a

$$P_\Theta = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\Theta}{\rho} = const$$

alakban fogalmazható meg. Általános esetben a χ skalármennyiséget, bár amint a fenti gondolatmenet mutatja, másként is tehetnénk, szinte kizárólag a potenciális hőmérséklettel azonosítjuk.

XV.2.2. *A potenciális örvényességi tétel általános levezetése*

Induljunk ki az örvényességi egyenlet Descartes-koordinátarendszerben felírt általános alakjából:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\right)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}+\frac{1}{\rho^3}(\nabla\rho\times\nabla p)+\frac{1}{\rho}(\nabla\times\mathbf{F}),$$

ahol $\boldsymbol{\omega}_a=\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\Omega}$ az abszolút örvényesség, $\mathbf{F}$ pedig az egységnyi tömegre ható súrlódási erő, illetve általános esetben a nem potenciálos erők összege.

Legyen továbbá χ tetszőleges skalármennyiség, amelyre

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=\mathrm{X},$$

ahol X a χ mennyiség forrásait és nyelőit reprezentálja. Alkalmazzuk a skalármennyiség totális időderiváltját megadó egyenletre az $\dfrac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla$ operációt:

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathrm{X}.$$

Fejtsük ki ennek az egyenletnek a bal oldalát, beírva a teljes differenciál jelentését, és cseréljük fel a totális differenciálást a gradiensképzéssel:

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\chi\right)=\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial\nabla\chi}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\nabla\chi\right]+\left[\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\mathbf{v}\right)\right]\cdot\nabla\chi.$$

Tovább alakítva

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\frac{\mathbf{d}\nabla\chi}{\mathbf{d}t}+\left[\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}\right]\cdot\nabla\chi$$

Átrendezve, és felhasználva, hogy $\left(\dfrac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\dfrac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathrm{X}$,

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\frac{\mathbf{d}\nabla\chi}{\mathbf{d}t}=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathrm{X}-\left[\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}\right]\cdot\nabla\chi.$$

Szorozzuk be a örvényességi egyenletet $\nabla\chi$-vel:

$$\nabla\chi\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\right)}{\mathrm{d}t}=\nabla\chi\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}+\nabla\chi\cdot\frac{1}{\rho^3}(\nabla\rho\times\nabla p)+\nabla\chi\cdot\frac{1}{\rho}(\Omega\times\mathbf{F}),$$

és adjuk össze az utolsó két egyenletet. A bal oldal a korábbi definíciónak megfelelő $P_\chi = \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\chi$ potenciális örvényesség totális deriváltjává alakítható, a jobb oldalon pedig a skalármennyiség forrástagja mellett a szolenoidális és a súrlódási tag marad meg.

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\chi\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathrm{X} + \nabla\chi\cdot\frac{1}{\rho^3}(\nabla\rho\times\nabla p) + \nabla\chi\cdot\frac{1}{\rho}(\Omega\times\mathbf{F})$$

Az egyenletből a korábbi érvelésnek megfelelően a szolenoidális tag eltűnik, ha skalármennyiségként a $\Theta = \Theta(\alpha, p)$ potenciális hőmérsékletet választjuk. Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\chi\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathrm{X} + \nabla\chi\cdot\frac{1}{\rho}(\Omega\times\mathbf{F})\cdot$$

Ez az összefüggés világosan mutatja, hogy a P_Θ potenciális örvényesség forrásai a fenti egyenlet jobb oldalán szereplő tagok sorrendjében a diabatikus és a súrlódási hatások.

Adiabatikus folyamatok esetén a szabad légkörben (ahol a súrlódás elhanyagolható) a potenciális örvényesség megmarad, azaz

$$P_\Theta = \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\chi = const\,.$$

XV.3. *A potenciális örvényességi tétel kvázisztatikus közelítésben*

A potenciális örvényességre nyert eredmény teljesen általános, az alkalmazások során azonban mindig speciális koordinátarendszerekben kell felírni. Az egyszerűség kedvéért specializálódjunk f-sík szokásos ortogonális koordinátarendszerére és kvázisztatikus esetre, ahol $w \approx 0$, és $\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$. Ekkor, mivel a formulákból a vertikális sebességet tartalmazó tagok eltűnnek, célszerű a potenciális örvényességet a benne szereplő vektormennyiségek (az abszolút örvényesség, valamint a potenciális hőmérséklet gradiense) horizontális és vertikális komponenseinek segítségével felírni. Az abszolút örvényesség komponensekkel felírva

$$\boldsymbol{\omega}_a = \xi\mathbf{i} + (\eta + l)\,\mathbf{j} + (\zeta + f)\,\mathbf{k}\,,$$

ahol a l és f a ($2\boldsymbol{\Omega} = l\mathbf{j} + f\mathbf{k}$) planetáris örvényesség komponensei, de az alkalmazott közelítésben $2\boldsymbol{\Omega} \approx f\mathbf{k}$, a relatív örvényesség pedig $\boldsymbol{\omega} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$, ahol $\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, $\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$ és $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$.

Az abszolút örvényesség, felhasználva, hogy $\boldsymbol{\omega}_a = \nabla \times \mathbf{v}$, az

$$\boldsymbol{\omega}_a = \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} + (\zeta + f)\,\mathbf{k}\,,$$

alakban is felírható, ahol $\mathbf{v}_h = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ a horizontális sebesség. Látható, hogy az abszolút örvényesség horizontális komponensében a termikus szél $\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z}$ komponensei jelennek meg. A potenciális hőmérséklet gradiensének horizontális és vertikális komponensei legyenek $\nabla\Theta = \left(\nabla_h\Theta, \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)$.

Ezekkel a komponensekkel

$$P_\Theta = \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} + (\zeta + f)\,\mathbf{k}\right) \cdot \left(\nabla_h\Theta + \frac{\partial\Theta}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\left(\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z}\right)\nabla_h\Theta + (\zeta + f)\,\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right].$$

Ebben a hidrosztatikus közelítést a

$$\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{\partial\Theta}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho\frac{\partial\Theta}{\partial p}$$

és

$$\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}$$

alakban felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$P_\Theta = -g\left(\nabla_h\Theta \cdot \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p} + (\zeta + f)\,\frac{\partial\Theta}{\partial p}\right).$$

Vegyük észre, hogy ebben a felírásban a potenciális hőmérséklet horizontális gradiensét az (x, y) síkban írjuk fel, míg a termikus szél és a potenciális hőmérséklet vertikális gradiensét p -rendszerben

A nagyskálájú folyamatokban mind a termikus szél komponensei, mind a planetáris örvényesség l összetevője elhanyagolható, így a potenciális örvényesség megmaradásának egyik szokásos közelítő megfogalmazásához jutunk. Hidrosztatikus rendszerben:

$$P_\Theta \approx -g(\zeta + f)\,\frac{\partial\Theta}{\partial p} = const\,.$$

XV.4. A potenciális örvényességi tétel p és Θ rendszerben

A hidrosztatikus közelítéssel nyert eredményben érdemes a potenciális hőmérséklet horizontális gradiensét is az (x, y, z) rendszerből az (x, y, p) nyomási koordináta-rendszerbe konvertálni. Mivel a két rendszer közötti konverzió esetén a horizontális nabla operátor esetén meg kell különböztetni, hogy a parciális deriváltak képzésekor milyen változót veszünk állandónak, a horizontális nabla operátor jelölésére bevezetjük a $\nabla_{h(z)}$ és $\nabla_{h(p)}$ jelölést. Ezzel

$$\nabla_{h(p)} = \nabla_{h(z)} + \left(\nabla_{h(p)} z\right) \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_{h(z)} + \left(\nabla_{h(p)} z\right) \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p} = \nabla_{h(z)} + \left(\nabla_{h(p)} z\right) \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p},$$

és mivel hidrosztatikus közelítésben

$$\left(\nabla_{h(p)} z\right) \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \left(\nabla_{h(p)} z\right) = -\rho \nabla_{h(p)} \phi,$$

átrendezés után a deriváltak közötti kapcsolatra

$$\nabla_{h(z)} = \nabla_{h(p)} + \rho \left(\nabla_{h(p)} \phi\right) \frac{\partial}{\partial p}$$

adódik.

Az abszolút örvényesség vertikális komponensének transzformációs egyenlete pedig

$$\zeta + f = \mathbf{k} \cdot \left(\nabla_{h(z)} \times \mathbf{v}_h\right) = f + \mathbf{k} \cdot \left(\nabla_{h(p)} \times \mathbf{v}_h\right) + \rho \mathbf{k} \cdot \left[\left(\nabla_{h(p)} \phi\right) \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}\right] = f + \zeta_p - \rho \left(\nabla_{h(p)} \phi\right) \cdot \left[\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}\right]$$

ahol $\zeta_p = \mathbf{k} \cdot \left(\nabla_{h(p)} \times \mathbf{v}_h\right)$.

A $P_\Theta = \frac{1}{\rho} \left(\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} + (\zeta + f) \mathbf{k}\right) \cdot \left(\nabla_h \Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \mathbf{k}\right)$ potenciális örvényességet a transzformációs egyenletekkel a

$$P_\Theta = \left(\nabla_{h(p)} \Theta \cdot \left(\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}\right) + \left(\zeta_p + f\right) \frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)$$

alakra hozhatjuk. Ez a Rossby féle potenciális örvényesség nyomási koordináta-rendszerben felírt alakja.

Amennyiben vertikális koordinátaként a potenciális hőmérsékletet kívánjuk alkalmazni, akkor a nyomási koordinátarendszerből a következő transzformációkkal juthatunk eredményhez:

$$\nabla_{h(\Theta)} = \nabla_{h(p)} - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \left(\nabla_{h(p)} \Theta\right) \frac{\partial}{\partial p},$$

$$\zeta_\Theta = \mathbf{k} \cdot \left(\nabla_{h(\Theta)} \times \mathbf{v}_h\right) = \mathbf{k} \cdot \left(\nabla_{h(p)} \times \mathbf{v}_h\right) - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \mathbf{k} \cdot \left(\nabla_{h(p)} \Theta \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}\right) = \zeta_p - \frac{\partial p}{\partial \Theta} \mathbf{k} \cdot \left(\nabla_{h(p)} \Theta \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}\right)$$

illetve

$$\zeta_p = \zeta_\Theta + \frac{\partial p}{\partial \Theta}\mathbf{k} \cdot \left(\nabla_{h(p)}\Theta \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p} \right)$$

Beírva ezt az egyenletet a korábban nyert $P_\Theta = \left(\nabla_{h(p)}\Theta \cdot \left(\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p} \right) + (\zeta_p + f)\frac{\partial \Theta}{\partial p} \right)$ összefüggésbe, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\zeta_\Theta + f)\frac{\partial \Theta}{\partial p} = 0 .$$

A potenciális örvényesség megmaradása tehát megfelelő egyszerűsítő feltételek mellett izentrop (izoteta) koordinátarendszerben az

$$(\zeta_\Theta + f)\frac{\partial \Theta}{\partial p} = const$$

alakban fogalmazható meg.

A $\sigma = -\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial \Theta}$ sztatikus stabilitási paraméter bevezetésével a potenciális örvényesség megmaradását szokás a

$$\frac{(\zeta_\Theta + f)}{\sigma} = -\frac{(\zeta_\Theta + f)}{-\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial \Theta}} = const$$

illetve a

$$-\frac{(\zeta_\Theta + f)}{\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial \Theta}} = const$$

alakban is megfogalmazni.

XV.4.1. *Az izentrop potenciális örvényesség közvetlen származtatása*

Az izentrop potenciális örvényesség az utóbbi években rendkívül fontossá vált a dinamikus meteorológia szinoptikus alkalmazásában, ezért a következőkben megmutatjuk közvetlen származtatását is a cirkuláció tétel alapján. A gondolatmenet analóg a fejezet gondolatmenetével.

Alkalmazzuk a $\frac{\mathrm{d}C_a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \mathbf{v}_a \,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\oint \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$ cirkuláció tételt izentrop felületen felvett kicsiny görbére. Itt $\mathbf{v}_a$ az abszolút sebesség. Tudjuk, hogy izentrop felületen felvett görbére a $\oint \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$ szolenoidális tag eltűnik, hiszen az adiabata egyenlete alapján bevezetett $\Theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}$ potenciális hőmérséklettel a sűrűség $\rho = p^{\frac{c_v}{c_p}}(R\Theta)^{-1} p_0^{\frac{R}{c_p}}$ alakban kifejezhető és így a $\oint \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \oint \mathrm{d}\, p^{\left(1-\frac{c_v}{c_p}\right)} = 0$ szolenoidális tag eltűnik. A cirkulációt a Stokes-tétellel átalakítva

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{n}\delta A) = 0 .$$

Ha az izentrop felület jó közelítéssel vízszintes, akkor az izentrop felületen kiválasztott δA elemi felületdarabra

$$\delta A(\zeta_\Theta + f) = const .$$

Válasszunk ki olyan légrészt, amely a δA felületelem fölé emelt hasábban a Θ és $\Theta + \delta\Theta$ izentropok között helyezkedik el. Legyen a légrész felső és alsó szintje között a nyomáskülönbség $-\delta p$. Ekkor a kiválasztott légrész tömege $\delta M = -\frac{\delta p}{g}\delta A$. A légtömeg mozgása során az izentropok közötti nyomáskülönbség változhat, de a δM tömegelem állandó marad, így a $\delta A = -\frac{\delta M g}{\delta p} = -\frac{\delta\Theta}{\delta p}\frac{\delta M g}{\delta\Theta}$. Mivel mind a tömegelem, mind pedig a potenciális hőmérséklet $\delta\Theta$ eltérése állandó, a $\delta p \to 0$ határátmenetben

$$\delta A(\zeta_\Theta + f) \xrightarrow[\delta p \to 0]{} (\zeta_\Theta + f)\left(-g\frac{\partial\Theta}{\partial p}\right) = const .$$

A $P_E = (\zeta_\Theta + f)\left(-g\frac{\partial\Theta}{\partial p}\right)$ mennyiség az Ertel-féle potenciális örvényesség. A potenciális örvényesség mértékegysége a PVU ($\frac{\mathrm{Km}^2}{\mathrm{kgs}}$). A negatív előjel azért került a definícióba, hogy a potenciális örvényesség az északi féltekén legyen pozitív.

XV.5. *Potenciális örvényesség állandó sűrűségű folyadékban*

A potenciális örvényesség bizonyos értelemben mindig az abszolút örvényesség és a folyadékoszlop effektív mélységének arányát méri. Az Ertel-féle potenciális örvényesség esetén például az effektív mélység a potenciális hőmérsékleti felületek közötti differenciális távolságot méri nyomás egységben.

Homogén összenyomhatatlan közeg esetén (ekkor a közeg már barotrop) a potenciális örvényesség-megmaradás egyszerűbb formát ölt. Mivel ekkor a folyadék sűrűsége állandó, a vizsgált materiális térfogatelem is állandó, azaz a felületelem fordítottan arányos a folyadékoszlop magasságával:

$$\delta A = \delta M (\rho h)^{-1} = \frac{C}{h}.$$

Beírva ezt a $\delta A(\zeta_\Theta + f) = const$ egyenletbe:

$$P_E = \frac{(\zeta_\Theta + f)}{h} = const$$

adódik.

Az állandó sűrűségű közeg esetén a tételnek szemléletes magyarázata adható. Tekintsünk egy hossztengelye körül ω_0 szögsebességgel forgó R_0 sugarú, h_0 magasságú, állandó ρ_0 sűrűségű hengert. A henger pusztán belső erők hatására megváltoztathatja sugarát és magasságát. Ebben az esetben természetesen $M = R^2 \pi h \rho_0$ a tömege és $N = \frac{1}{2} M R^2 \omega$ az impulzusmomentuma, ahol R és ω, a henger pillanatnyi sugara és szögsebessége állandó marad. Kifejezve a tömeggel a sugár négyzetét és beírva az impulzusmomentum állandóságát kifejező egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$N = \frac{1}{2} M R^2 \omega = \frac{1}{2} \frac{M^2 R^2}{R^2 \pi \rho_0} \frac{\omega}{h} = const ,$$

amiből

$$\frac{\omega}{h} = const .$$

Látható tehát, hogy a merevtestszerűen forgó, de magasságát és sugarát változtató henger szögsebességének és magasságának hányadosa állandó, ami éppen a potenciális örvényesség megmaradását fejezi ki az ilyen típusú mozgásra.

A folyadék mozgása általában ennél bonyolultabb, nem biztosított a merevtestszerű forgás és a nagy hengerszerű térfogatok állandósága sem, ezért a tételt, bár gyökere ugyanúgy a tömeg és az impulzusmomentum megmaradása, többnyire csak lokálisan fogalmazhatjuk meg.

XV.6. A potenciális örvényesség megmaradásának következményei

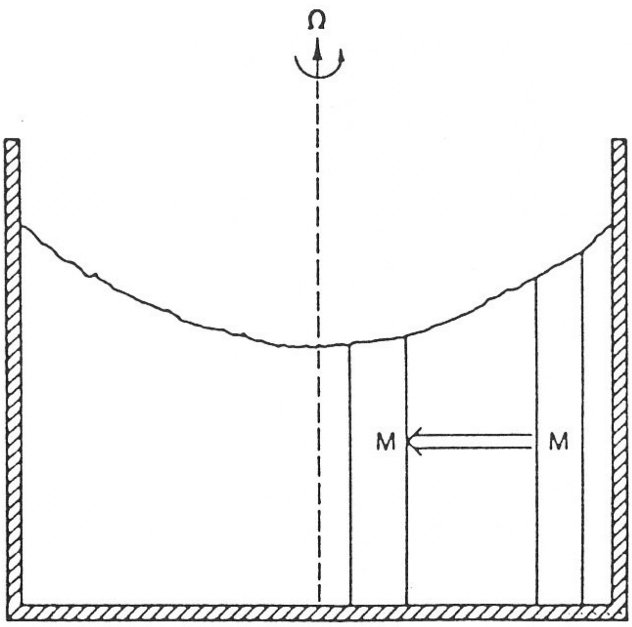
Barotrop közegben $\zeta_\Theta = \zeta_p$, azaz a potenciális örvényesség megmaradása a

$$\frac{\zeta + f}{\Delta p} = const$$

alakra hozható. Ebből összenyomhatatlan közegben (ami természetesen barotrop) a p - rendszerbeli barotrop közegre vonatkozó potenciális örvényességet egyszerűen átírhatjuk a z - rendszerbe a sztatika alapegyenletének ($\Delta p = -\rho g \Delta z$) felhasználásával:

$$\frac{\zeta + f}{\Delta z} = const\,.$$

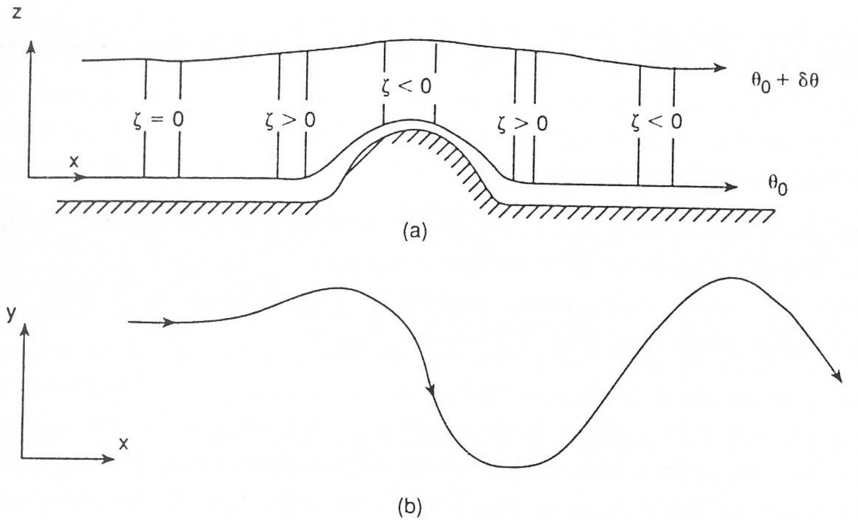
A fenti egyenlet azt szemlélteti, hogy a ζ relatív örvényességgel jellemzett barotrop közegben a rétegvastagság változása dinamikailag azonos az f Coriolis-paraméter megváltozásával. Ez adja a dinamikai alapot olyan forgókádas kísérletekhez, ahol a kád alja a forgástengelytől távolodva emelkedik. Így modellezhető a Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti változása, az ún. $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ hatás. Ha egy ciklonális rendszer állandó relatív örvényesség mellett délre tolódik (csökken a Coriolis-paraméter), akkor kimélyül (csökken a rétegvastagság). Nézzük a potenciális örvényesség megmaradási tételének egy másik következményét! Legyen Ω állandó szögsebességgel forgó kád. Tekintsünk egy barotrop, összenyomhatatlan közeget! A forgó folyadék vastagságát ábrázolja a 2. ábra a forgástengelytől vett távolság függvényében. A forgómozgást a nyomási gradiens erő tartja fenn (értéke megegyezik a centripetális erővel, illetve ugyanolyan nagyságú, mint a centrifugális erő, de ellentétes irányú). A középponttól távolodó, kifele mozgó folyadékelemek vastagsága megnő, így növekszik a relatív örvényességük is. A relatív örvényesség a folyadékoszlop magasságával változik. A folyadékoszlop magassága és a sugár közötti parabolikus függvénykapcsolat van. A forgás középpontjától kifele haladva növekszik a folyadékoszlop magassága, növekszik a relatív örvényesség.



2. ábra. A mélység függése a sugártól egy henger alakú forgókádban. Holton J.R., 1972: An introduction to dynamic meteorology. 73.

XV.6.1. *A hegyen átkelő levegő mozgása,* ***a lee-oldali ciklogenezis***

A potenciális örvényesség megmaradási tétele alapján egyszerűen értelmezhető a hegységen átkelő levegő abszolút örvényességének megváltozása, a lee-oldali ciklogenezis. Elsőként tekintsük azt az esetet, amikor nyugati áramlással sodródó légrész kel át magas hegységen, pl. az Alpokon vagy a Kárpátokon. Ekkor a hegység mögött ciklogenezis figyelhető meg. A hegységen átkelő levegő hullámot vet, kialakítva a hegység mögötti feláramlási és leáramlási területeket. Értelmezzük a folyamatot a 3. ábra alapján!



3. ábra. Nyugatias áramlással sodródó légrész átkelése domborzati akadály fölött: (a) a légoszlop magassága x függvényében, (b) a légrész trajektóriája az (x, y) síkon. Holton J.R., 1972: An introduction to dynamic meteorology. 71.

A levegőrész mozogjon a $\Theta_0 + \Delta\Theta_0$ és $\Theta_0 + \Delta\Theta$ potenciális hőmérsékleti felületek között! Az emelkedés legyen száraz adiabatikus, és a hegység pereméhez érkező légrész relatív örvényessége legyen nulla ($\zeta = 0$). A hegységen átkelő, felemelkedő levegő vastagsága – illetve az alsó és a felső határfelület közötti nyomáskülönbség – csökken, megnő a légrész horizontális kiterjedése. Az abszolút örvényességnek csökkennie kell, hogy teljesülhessen a potenciális örvényesség megmaradási tétele. Ez akkor lehetséges, ha a levegő anticiklonális görbülettel rendelkezik, s dél felé mozdul el. Ekkor mind a planetáris örvényesség, mind a relatív örvényesség csökken.

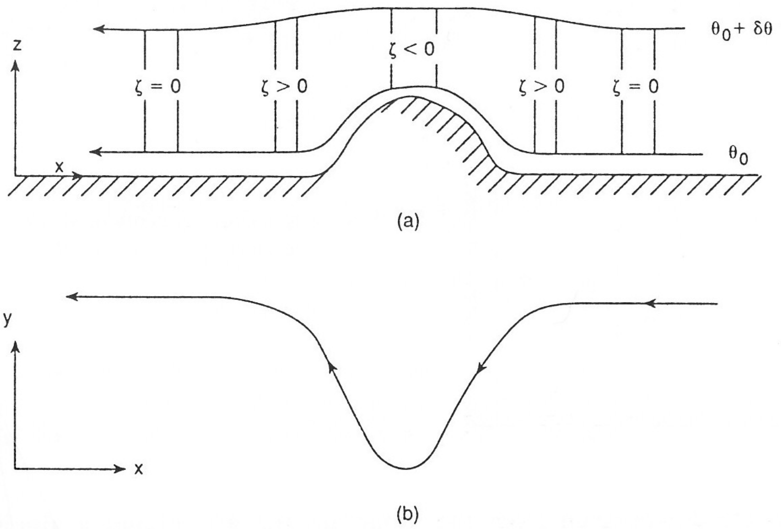
A potenciális örvényesség megmaradása miatt a légrész nem indulhat el észak felé, illetve az északias sebességperturbáció nem növekedhet, nem alakulhat ki hullámmozgás. Északias elmozdulás esetén ugyanis ciklonális görbülettel és növekvő Coriolis-paraméterrel számolhatunk, ami a csökkenő rétegvastagság mellett nem elégítheti ki a potenciális örvényesség megmaradását.

A délfelé induló – hullámot vető – levegőrész a hegység legmagasabb része felett lesz a legkisebb vastagságú, azaz itt lesz a legkisebb az abszolút örvényessége. A gerincen átkelve a leszálló levegő vastagsága folyamatosan növekszik, ami az abszolút örvényesség növekedéséhez vezet. Ez csak úgy lehetséges, ha a hegység közepére érkező légrész az eredeti szélességi körnél lényegesen délebbre helyezkedik el, és továbbra is dél fele haladva ciklonális görbülettel rendelkezik. A ciklonális örvényesség kompenzálja a planetáris örvényesség csökkenését, ami a dél fele tartó mozgás következménye.

Amikor a légrész eléri a hegység keleti lábát, s így a kezdeti vastagságát, akkor a kiindulási állapotnál kisebb planetáris örvényességet a ciklonális görbületből származó pozitív relatív örvényesség kompenzálja (a légrész a kiindulási helyzetnél délebbre lesz).

Amikor a légrész visszatér a kiindulási szélességi körre, akkor északkeleti irányba mozog anticiklonális görbülettel, vagyis vastagsága kisebb lesz, mint a kiindulási helyzetben volt; leszálló mozgást tapasztalunk. A következő visszatéréskor ciklonális görbületet, viszont a kezdetinél nagyobb rétegvastagságot és feláramló mozgást figyelhetünk meg. (Ha a légrész vastagsága nem változhat, akkor éppen ezen a szélességen lesz a ciklonális és az anticiklonáris forgás közötti váltás.)

Más áramlási kép alakul ki, ha a légrész keleti irányból közelíti meg a hegységet. A domborzat felemelkedésre kényszeríti a légrészt. Csökken a vastagsága. A potenciális örvényesség megmaradása értelmében a légrész délies irányba indul el, hogy csökkenjen a planetáris örvényessége. Ez érthető, hiszen a kezdetben emelkedő levegő görbülete még végtelen, tehát a rétegvastagság csökkenését csak a délies elmozdulásból származó planetáris örvényesség csökkenése tudja kompenzálni (a potenciális örvényesség állandó marad). Ez ciklonális görbületet, tehát pozitív örvényességet jelent. A rétegvastagság csökkenését és a fellépő pozitív örvényességet a szélességi kör változásából eredő hatásnak kell kompenzálnia. A ciklonális mozgás hamar átalakul anticiklonálissá. Ez esetben kisebb hullámhosszúságú mozgást tapasztalunk, mint a nyugatról érkező levegőben. A 4. ábra szerint a hegységen átkelő levegő a kiindulási szélességre visszatérve már nem rendelkezik abszolút örvényességgel. Nem alakul ki a hegység mögötti hullámmozgás.



4. ábra. Keleties áramlással sodródó légrész átkelése domborzati akadály fölött. Holton J.R., 1972: An introduction to dynamic meteorology. 72.

Vizsgáljuk meg azt az esetet is, ha a keleties áramlással sodródó légrész északias sebességperturbációval rendelkezik! Ekkor északra indulva anticiklonális görbülettel rendelkezik, ami negatív relatív örvényességet és növekvő Coriolis-paramétert jelent. A csökkenő rétegvastagság miatt csak egy erős anticiklonális görbületű mozgás képes kompenzálni a növekvő planetáris örvényességet, vagyis a légrész nem kel át a hegyen – visszafordul, a sebességperturbáció csökken, ”felemészti a súrlódás”.

Ezek természetesen idealizált esetek, de alkalmasak arra, hogy rávilágítsanak a nyugat-keleti, illetve a kelet-nyugati irányban mozgó légrészek eltérő sajátosságaira.