

IX. Mozgásegyenletek szférikus koordináta-rendszerben

X.1. A görbe vonalú ortogonális koordináta-rendszer.....	2
X.1.1. A skalár- és vektorinvariánsok alakja a görbe vonalú ortogonális rendszerben.....	5
X.1.1.1. A skalármező gradiense.....	6
X.1.1.2. A divergencia.....	6
X.1.1.3. A Laplace-operátor.....	7
X.1.1.4. A rotáció.....	7
X.2. A szférikus koordináta-rendszer.....	8
X.2.1. Fizikai koordináták.....	9
X.2.2. Sebességek és gyorsulások a szférikus koordináta-rendszerben.....	9
X.2.2.1. Az abszolút szférikus rendszerbeli gyorsulás.....	15
X.2.2.2. A Navier-Stokes egyenlet az abszolút szférikus rendszerben.....	15
X.2.3. A relatív szférikus koordináta-rendszer.....	16
X.2.4. A mozgásegyenletek alakja a forgó Földön.....	18
X.2.5. A Föld geoid alakja.....	19
X.3. A hidro-termodinamikai egyenletrendszer alakja a forgó Földön.....	20
X.3.1. A mozgásegyenletek.....	20
X.3.2. A kontinuitási egyenlet.....	21
X.3.3. A termodinamikai egyenlet.....	21
X.3.4. A nedvességszállítási egyenlet.....	21
X.3.5. Az állapotegyenlet.....	22

A légköri mozgások leírásakor adott földrajzi helyen a légköri folyamatok leírására olyan Descartes-féle koordináta-rendszer a legalkalmasabb, amelynek tengelyei rendre kelet és észak felé, valamint függőlegesen felfelé mutatnak. A Föld esetében ez azt jelenti, hogy adott helyen a Föld érintősíkjába eső koordináta-rendszert használunk és ezt a koordináta-rendszert távolabbi helyeken is megtartjuk. Az általános cirkuláció mozgásrendszereinek leírásakor, a hemiszférikus vagy globális időjárás előrejelző modellek konstruálásakor ez a leírásmód már nem alkalmazható. A Föld adott helyén felvett érintősík az adott helytől távolabb már nagyon eltér a Föld felszínétől. Alkalmasabb tehát, ha a Föld görbületéhez illeszkedő koordináta-rendszert választunk. Ilyen koordináta-rendszer a gömbi polárkoordináta-rendszer, egyszerűbben szférikus koordináta-rendszer.

A légköri folyamatok leírásában további természetes követelmény, hogy a mozgásokat a forgó Földhöz képest írjuk le, azaz a Földdel együtt forgó koordináta-rendszert használunk. Ebben a fejezetben a légköri egyenleteket a Földdel együtt forgó szférikus koordináta-rendszerben írjuk fel.

A Descartes-rendszerről a forgó gömbi koordináta-rendszerre való áttérést két lépésben tesszük meg. Először eltekintünk a Föld forgásától, s azt csak a gömbi koordináta-rendszerre való áttérés után vesszük figyelembe

X.1. A görbe vonalú ortogonális koordináta-rendszer

A görbe vonalú koordináta-rendszerek az egyenes vonalú koordináta-rendszerek olyan általánosításai, amelyekben a koordináta-vonalak szerepét görbék veszik át. A tér minden pontján három egymást metsző koordinátavonalat veszünk fel, és adott helyen ezeknek a vonaloknak az érintővektorait használjuk bázisvektorokként. A bázisvektorok a vizsgált pont kis környezetében ferdeszögű koordináta-rendszert jelölnek ki. Ez a koordináta-rendszer azonban helyről helyre változik.

A görbe vonalú koordináta-rendszerek lokális koordinátáit kijelölő bázisvektorok két tekintetben is eltérnek a Descartes-féle koordináta-rendszerek bázisvektoraitól. Egyrészt többnyire nem egységvektorok, másrészt, mivel általában ferdeszögű koordinátarendszert jelölnek ki, a koordináta-vonalak érintővektorai nem egyeznek meg a koordinátasíkok normálvektoraival.

A görbe vonalú koordináta-rendszerek általános tárgyalása helyett most olyan koordináta-rendszerekre korlátozódunk, amelyeknek paramétervonalai minden pontban merőlegesek egymásra. Ezeket a koordináta-rendszereket ortogonális koordináta-rendszernek nevezzük. Ilyen koordináta-rendszer például a gömbi (vagy szférikus) rendszer, illetve a fizikában gyakran használt hengerkoordináta-rendszer.

Az alapvető különbség a szokásos derékszögű és az ortogonális görbe vonalú rendszerek között az, hogy az utóbbiakban általában pontról pontra változnak a koordináta-vonalak érintő (egység)vektorai, illetve a koordináta-felületek normálvektorai.

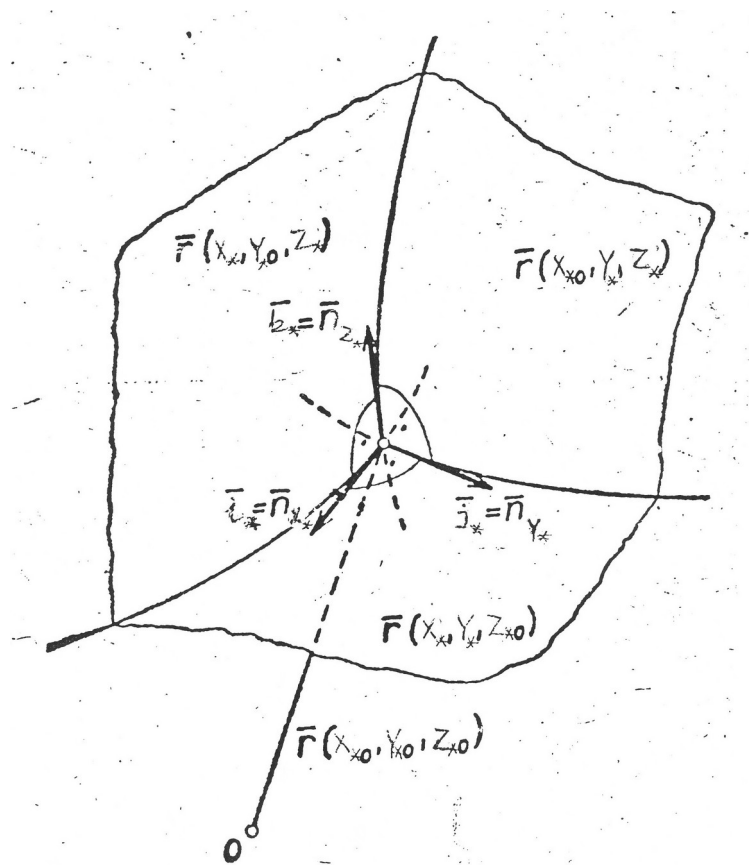
Legyen adott az (x, y, z) derékszögű Descartes-féle abszolút koordináta-rendszer. Tekintsük a koordináta-rendszer origójából induló $\mathbf{r}(x, y, z)$ helyvektort! Legyen adott egy folytonos és bijektív, folytonosan differenciálható $\mathbf{r}(x_*, y_*, z_*)$ vektor-vektor függvény. Ekkor az x, y, z koordináták megadhatók $\mathbf{r}(x_*, y_*, z_*)$ függvényében:

$$x = x(x_*, y_*, z_*) , \quad y = y(x_*, y_*, z_*) , \quad z = z(x_*, y_*, z_*) .$$

Az (x_*, y_*, z_*) számhármasság függvényében felírható az \mathbf{r} helyvektor görbe vonalú ortogonális koordináta-rendszerbeli alakja. Megjegyezzük, hogy a görbe vonalú rendszer független koordinátái nem feltétlenül hosszúság dimenziójúak. Koordináta lehet például valamilyen egyenessel, illetve felülettel bezárt szög, ahogyan azt a szférikus koordináta-rendszerben, vagy a hengerkoordináta-rendszerben látni fogjuk.

Vizsgáljuk meg a görbe vonalú ortogonális rendszerben a koordináta-vonalak által meghatározott érintő- és normálvektorokat, illetve a koordináta-görbék ívhosszát, az elemi koordináta-felületeket, illetve a koordináta-felületek határolta elemi görbe vonalú hasáb térfogatát!

Ortogonális rendszerben a koordináta-vonalak érintővektorai és a koordináta-felületek normálvektorai megegyeznek (1. ábra). Jelölje ezeket $(\mathbf{i}_*, \mathbf{j}_*, \mathbf{k}_*)$.



1. ábra. Ortogonális derékszögű koordináta-rendszer egységvektorai az $\mathbf{r}(x_{*0}, y_{*0}, z_{*0})$ pontban. 76. ábra.

A koordináta-vonalak érintő vektorai a Descartes-féle rendszerben:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_*}{\partial x_*} = \mathbf{r}_{x_*} = \frac{\partial x}{\partial x_*} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x_*} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x_*} \mathbf{k} = x_{x_*} \mathbf{i} + y_{x_*} \mathbf{j} + z_{x_*} \mathbf{k} = r_{x_*} \mathbf{i}_*$$

mert pl. $\frac{\partial r_{x_*}}{\partial x_*} = \frac{\partial(x\mathbf{i})}{\partial x_*} = \frac{\partial x}{\partial x_*} \mathbf{i}$, hiszen az (x, y, z) derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszer, ahol az egységvektorok mindenütt azonosak (helyzetük az eltolástól független).

Vegyük figyelembe, hogy $\frac{\partial \mathbf{r}_*}{\partial x_*} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_*}{\partial x_*} \right)_{y_*, z_*}$, azaz x_* szerinti parciális derivált képzések a másik két változó állandó értékű. Ezért a deriváltvektor éppen az x_* koordináta-vonal érintőjébe eső, azaz \mathbf{i}_* irányú vektort ad. Az így nyert érintővektor azonban nem egységnyi hosszúságú, hanem:

$$r_{x_*} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_*} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_*} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_*} \right)^2}$$

Hasonlóképpen:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_*} = \mathbf{r}_{y_*} = r_{y_*} \mathbf{j}_*, \quad r_{y_*} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y_*}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_*}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y_*}\right)^2},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_*} = \mathbf{r}_{z_*} = r_{z_*} \mathbf{k}_*, \quad r_{z_*} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z_*}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z_*}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z_*}\right)^2},$$

ahol az $(r_{x_*}, r_{y_*}, r_{z_*})$ abszolút értékek az ún. Lamé-együtthatók.

A fentiekhez hasonlóan adhatók meg a görbe koordináta-felületek normálvektorai, amelyek a koordinátafelületek gradiensei. Itt a gradiens az $x_* = \text{const}$ felület, azaz az (y_*, z_*) koordináta-felület normálvektorát adja meg. Mivel a koordináta-rendszer ortogonális, a felület normálvektorának az x_* koordinátavonal érintőjébe, azaz \mathbf{i}_* irányba kell esnie:

$$\mathbf{grad} x_* = \frac{\partial x_*}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial x_*}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial x_*}{\partial z} \mathbf{k} = g_{x_*} \mathbf{i}_*,$$

tehát

$$g_{x_*} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_*}{\partial z}\right)^2},$$

és hasonlóan

$$\mathbf{grad} y_* = g_{y_*} \mathbf{j}_*, \quad g_{y_*} = \sqrt{\left(\frac{\partial y_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_*}{\partial z}\right)^2},$$

$$\mathbf{grad} z_* = g_{z_*} \mathbf{k}_*, \quad g_{z_*} = \sqrt{\left(\frac{\partial z_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_*}{\partial z}\right)^2}.$$

A $(g_{x_*}, g_{y_*}, g_{z_*})$ abszolút értékek a görbe vonalú ortogonális rendszer koordinátáinak úgynevezett első differenciálparaméterei. Mivel az ortogonális görbe vonalú koordináta-rendszerben az érintő- és a normál egységvektorok megegyeznek, továbbá teljesül, hogy

$$dx_* = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad} x_* = (\mathbf{r}_{x_*} dx_*) \cdot \mathbf{grad} x_* = (r_{x_*} dx_* \mathbf{i}_*) \cdot \mathbf{grad} x_*,$$

hiszen $\frac{d\mathbf{r}}{dx_*} = \mathbf{r}_{x_*} = r_{x_*} \mathbf{i}_*$. A fenti egyenlőség analógjai alapján felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}_{x_*} \cdot \mathbf{grad} x_* = 1, \quad \mathbf{r}_{y_*} \cdot \mathbf{grad} y_* = 1, \quad \mathbf{r}_{z_*} \cdot \mathbf{grad} z_* = 1.$$

A felírásból következik, hogy ortogonális görbe vonalú rendszerben az adott koordináta-irányhoz tartozó Lamé-együttható és a koordináta első differenciálparamétere egymás reciproka. Szorzatuk tehát 1.

$$g_{x_*} = \frac{1}{r_{x_*}}, \quad g_{y_*} = \frac{1}{r_{y_*}}, \quad g_{z_*} = \frac{1}{r_{z_*}}.$$

Az \mathbf{r} helyvektor $d\mathbf{r}$ differenciálja az (x_*, y_*, z_*) koordináták megváltozása alapján:

$$d\mathbf{r} = r_{x_*} dx_* + r_{y_*} dy_* + r_{z_*} dz_* = r_{x_*} dx_* \mathbf{i}_* + r_{y_*} dy_* \mathbf{j}_* + r_{z_*} dz_* \mathbf{k}_*.$$

A koordináta-görbék ívelemeinek hossza rendre:

$$ds_{x_*} = r_{x_*} dx_*, \quad ds_{y_*} = r_{y_*} dy_*, \quad ds_{z_*} = r_{z_*} dz_*.$$

Tetszőleges térgörbe íveleme – az ortogonalitás miatt:

$$ds = \sqrt{(r_{x_*}^2 dx_*^2 + r_{y_*}^2 dy_*^2 + r_{z_*}^2 dz_*^2)}.$$

A koordináta-felület elemeket egymással derékszöget bezáró ívek jelölik ki. Az $\mathbf{i}_*, \mathbf{j}_*, \mathbf{k}_*$ normálisú felszínelemek területe rendre:

$$dF_{x_*} = r_{y_*} r_{z_*} dy_* dz_*, \quad dF_{y_*} = r_{x_*} r_{z_*} dx_* dz_*, \quad dF_{z_*} = r_{x_*} r_{y_*} dx_* dy_*.$$

A felszínelemek határolta elemi térfogat pedig:

$$dV = r_{x_*} r_{y_*} r_{z_*} dx_* dy_* dz_*.$$

X.1.1. A skalár- és vektorinvariánsok alakja a görbe vonalú ortogonális rendszerben

Tekintsük a $p(x_*, y_*, z_*)$ skalár-vektor függvényt (pl. a nyomási mezőt) és a $\mathbf{v}(x_*, y_*, z_*) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(x_*, y_*, z_*)) = \mathbf{v}_* = (u_*, v_*, w_*)$ vektor-vektor függvényt (pl. a szélességi mezőt). Elsőként a skalármező gradiensét, majd a vektormező divergenciáját (illetve a skalármező Laplace-operátorát), végezetül pedig a vektormező rotációját állítjuk elő.

Megadjuk a gyakorlati számításokban fontos érintő egységvektorok koordináta-irányok szerinti parciális deriváltjait is. Ezek természetesen nem invariáns mennyiségek, hiszen függenek a koordináta-tengelyek helyzetétől, az elmozdulások irányától.

X.1.1.1. A skalármező gradiense

$$\mathbf{grad}p(\mathbf{r}) = \frac{\partial p}{\partial x_*} \mathbf{grad}x_* + \frac{\partial p}{\partial y_*} \mathbf{grad}y_* + \frac{\partial p}{\partial z_*} \mathbf{grad}z_* =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial p}{\partial x_*} g_{x_*} \mathbf{i}_* + \frac{\partial p}{\partial y_*} g_{y_*} \mathbf{j}_* + \frac{\partial p}{\partial z_*} g_{z_*} \mathbf{k}_* = \frac{\partial p}{\partial x_*} \frac{1}{r_{x_*}} \mathbf{i}_* + \frac{\partial p}{\partial y_*} \frac{1}{r_{y_*}} \mathbf{j}_* + \frac{\partial p}{\partial z_*} \frac{1}{r_{z_*}} \mathbf{k}_* = \\
&= \frac{\partial p}{\partial s_{x_*}} \mathbf{i}_* + \frac{\partial p}{\partial s_{y_*}} \mathbf{j}_* + \frac{\partial p}{\partial s_{z_*}} \mathbf{k}_*
\end{aligned}$$

A fenti eredményt a közvetett függvények deriválási szabályait felhasználva kaptuk, hiszen $p(\mathbf{r}) = p(x_*(\mathbf{r}), y_*(\mathbf{r}), z_*(\mathbf{r}))$.

X.1.1.2. A divergencia

A divergenciát a definíciós egyenlet alapján írjuk fel a koordináta-felületelemek határolta elemi görbe vonalú hasábra (az ívelemek derékszöget zárnak be egymással).

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{dV} \oint_{dF} \mathbf{v}_*(\mathbf{r}(x_*, y_*, z_*)) \cdot d\mathbf{F}_*$$

Az egymással szemben lévő három felülepárra (a szemben levő felületek nem ugyanolyan nagyságúak) elvégezve az integrálást kapjuk, hogy:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r_{x_*} r_{y_*} r_{z_*} dx_* dy_* dz_*} \left(v_{x_*} r_{x_*} + \left(v_{y_*} r_{y_*} + \frac{\partial(v_{y_*} r_{y_*})}{\partial y_*} dy_* \right) dz_* + \dots \right)$$

.....

.....

$$= \frac{1}{r_{x_*} r_{y_*} r_{z_*}} \left(\frac{\partial(v_{x_*} r_{x_*})}{\partial x_*} + \frac{\partial(v_{y_*} r_{y_*})}{\partial y_*} + \frac{\partial(v_{z_*} r_{z_*})}{\partial z_*} \right)$$

Görbe vonalú ortogonális rendszerben változik az egységvektorok térbeli helyzete. Így értelmes kérdés az egyes egységvektorok divergenciájának a meghatározása. A divergencia általános alakjából kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{i}_* &= \frac{1}{r_{x_*} r_{y_*} r_{z_*}} \frac{\partial(r_{y_*} r_{z_*})}{\partial x_*}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j}_* = \frac{1}{r_{x_*} r_{y_*} r_{z_*}} \frac{\partial(r_{x_*} r_{z_*})}{\partial y_*}, \\
\operatorname{div} \mathbf{k}_* &= \frac{1}{r_{x_*} r_{y_*} r_{z_*}} \frac{\partial(r_{x_*} r_{y_*})}{\partial z_*}.
\end{aligned}$$

Természetesen $\operatorname{div} \mathbf{i}_* \neq \operatorname{div} \mathbf{i} \equiv 0$, és hasonlóan $\operatorname{div} \mathbf{j}_* \neq \operatorname{div} \mathbf{j} \equiv 0$, $\operatorname{div} \mathbf{k}_* \neq \operatorname{div} \mathbf{k} \equiv 0$.

X.1.1.3. A Laplace-operátor

Szintén invariáns mennyiség a skalármező Laplace-operátora:

$$\Delta p = \operatorname{div} \mathbf{grad} p.$$

A definíciós egyenlet szerint:

$$\Delta p = \frac{1}{r_{x^*} r_{y^*} r_{z^*}} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{r_{y^*} r_{z^*}}{r_{x^*}} \frac{\partial p}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{r_{x^*} r_{z^*}}{r_{y^*}} \frac{\partial p}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{r_{x^*} r_{y^*}}{r_{z^*}} \frac{\partial p}{\partial z^*} \right) \right].$$

X.1.1.4. A rotáció

A rotációt szintén az invariáns (integrál alakú) definíció alapján állítjuk elő. Azt használjuk ki, hogy a rotációnak adott koordináta-felületre merőleges (\mathbf{n}_*) komponense megegyezik az adott koordináta-felületen vett cirkuláció és a felületelem hányadosával, midőn a felületelem mérete nullához tart

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} |_{n^*} = \frac{1}{dF_{n^*} dG_{n^*}} \oint \mathbf{v} d\mathbf{r}$$

ahol dG_{n^*} a dF_{n^*} felületelemet körülvevő zárt görbe kerülete. Meghatározva a kijelölt vonal-integrálokat, a rotáció komponenseire adódik:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} |_{z^*} = \frac{1}{r_{x^*} r_{y^*} r_{z^*}} \left[\left(\left(w_{x^*} + \frac{\partial(w_{x^*})}{\partial y^*} dy^* \right) \cdot w_{y^*} dz^* + \left[- \left(v_{x^*} r_{y^*} + \frac{\partial(v_{x^*} r_{y^*})}{\partial z^*} dz^* \right) + v_{y^*} r_{y^*} \right] dy^* \right) \right] = \frac{1}{r_{x^*} r_{z^*}} \left[\frac{\partial(w_{x^*} r_{z^*})}{\partial y^*} - \frac{\partial(v_{x^*} r_{y^*})}{\partial z^*} \right].$$

A másik két komponens értéke hasonló megfontolások után:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} |_{y^*} = \frac{1}{r_{x^*} r_{z^*}} \left[\frac{\partial(u_{x^*} r_{z^*})}{\partial z^*} - \frac{\partial(w_{x^*} r_{y^*})}{\partial x^*} \right], \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} |_{x^*} = \frac{1}{r_{x^*} r_{y^*}} \left[\frac{\partial(v_{x^*} r_{y^*})}{\partial x^*} - \frac{\partial(u_{x^*} r_{z^*})}{\partial y^*} \right].$$

A görbe vonalú ortogonális rendszerben az egységvektorok rotációja sem nulla.

$$\operatorname{rot} \mathbf{i}_* = \mathbf{j}_* \frac{1}{r_{x^*} r_{z^*}} \frac{\partial r_{x^*}}{\partial z^*} - \mathbf{k}_* \frac{1}{r_{x^*} r_{y^*}} \frac{\partial r_{x^*}}{\partial y^*} = \frac{1}{r_{x^*}} \mathbf{grad} r_{x^*} \times \mathbf{i}_*,$$

illetve a másik két egységvektorra:

$$\operatorname{rot} \mathbf{j}_* = \frac{1}{r_{y^*}} \mathbf{grad} r_{y^*} \times \mathbf{j}_*, \quad \operatorname{rot} \mathbf{k}_* = \frac{1}{r_{z^*}} \mathbf{grad} r_{z^*} \times \mathbf{k}_*.$$

Végezetül, levezetés nélkül, példaként megadjuk az \mathbf{i}_* egységvektor parciális deriváltjait.

$$\frac{\partial \mathbf{i}_*}{\partial x_*} = -\frac{1}{r_{y_*}} \frac{\partial r_{x_*}}{\partial y_*} \mathbf{j}_* - \frac{1}{r_{z_*}} \frac{\partial r_{x_*}}{\partial z_*} \mathbf{k}_*, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_*}{\partial y_*} = \frac{1}{r_{x_*}} \frac{\partial r_{y_*}}{\partial x_*} \mathbf{j}_*, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_*}{\partial z_*} = \frac{1}{r_{x_*}} \frac{\partial r_{z_*}}{\partial x_*} \mathbf{k}_*.$$

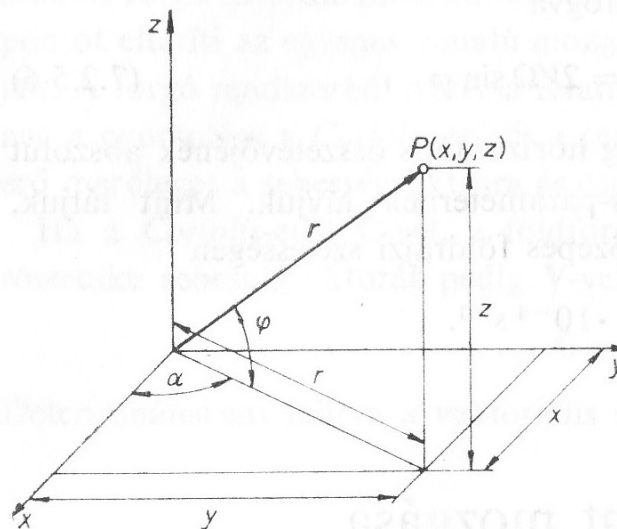
A másik két egységvektor deriváltjai hasonló elvek alapján adhatók meg. E deriváltakból természetesen előáll az adott egységvektor divergenciája és rotációja.

X.2. A szférikus koordináta-rendszer

A globális vagy hemiszférikus folyamatok modellezésében a légköri mozgásrendszereket, mint már említettük, szférikus koordináta-rendszerben a legegyszerűbb leírni. A szférikus rendszer – különösen a nem hidrosztatikus feltételezés mellett – a mezoszkálájú modellezésben is egyre fontosabb szerepet játszik.

Először a nyugvónak képzelt Földhöz rögzített abszolút szférikus rendszerrel foglalkozunk.

A gömbi koordinátarendszer független koordinátái két szög és egy távolság (α, φ, r) , amelyeket az (x, y, z) Descartes-féle abszolút koordináta-rendszerhez viszonyítva írunk fel a 2. ábra szerint.



2. ábra. A szférikus koordináta-rendszer felépítése.

Az α szög a vizsgált ponthoz húzott \mathbf{r} vektor (x, y) síkra vett vetülete és az x tengely által bezárt szög, φ az \mathbf{r} vektornak az (x, y) síkkal bezárt szöge, míg az r a koordináta-rendszer középpontjától vett távolság: a helyvektor hossza! E rendszerben a Lamé-együtthatók rendre:

$$r_{x_*} = r_{\alpha} = r \cos \varphi, \quad r_{y_*} = r_{\varphi} = r, \quad r_{z_*} = r_r = 1.$$

A Descartes-rendszerbeli koordináták kifejezhetők a szférikus rendszerbeli koordinátákkal:

$$x = r \cos \varphi \cos \alpha, \quad y = r \cos \varphi \sin \alpha, \quad z = r \sin \varphi.$$

Megfordítva pedig:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

X.2.1. Fizikai koordináták

A gömbi koordináta-rendszerben két szög- és egy távolság-koordinátát használunk. A szögkoordináták időderiváltjai nem sebesség, hanem szögsebesség dimenziójúak, és a koordináta vonalához rendelhető bázisvektorok sem egységvektorok. Emiatt ezek a mennyiségek nehezen hasonlíthatók össze a szokásos mérési adatokkal. Emiatt bevezetjük az úgynevezett fizikai koordinátákat, amelyek a szférikus rendszerbeli koordináta változások helyett a vizsgált pontbeli tényleges elmozdulásokat jelentik.

Az (x, y, z) rendszerbeli elemi elmozdulásokat jelölje dx, dy, dz ; az (α, φ, r) abszolút szférikus rendszerbeli $d\alpha, d\varphi, dr$ koordináta-változásokhoz tartozó tényleges elmozdulásokat pedig $dx_{sa}, dy_{sa}, dz_{sa}$. Az elemi elmozdulások és a koordináta-differenciálok között a

$$dx_{sa} = r \cos \varphi d\alpha, \quad dy_{sa} = r d\varphi, \quad dz_{sa} = dr$$

összefüggések állnak fenn. A $dx_{sa}, dy_{sa}, dz_{sa}$ differenciálok a fizikai koordináták elemi megváltozásai.

X.2.2. Sebességek és gyorsulások a szférikus koordináta-rendszerben

A szélesebbesség-komponensek az (x, y, z) rendszerben:

$$u = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad w = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Az abszolút szférikus rendszer lokális koordináta-rendszerében a sebességkomponensek az elemi elmozdulások és a hozzájuk szükséges kicsiny idő határértékeként adódnak:

$$u_{sa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_{sa}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{dx_{sa}}{dt} = r \cos \varphi \frac{d\alpha}{dt} = r \cos \varphi \dot{\alpha},$$

$$v_{sa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y_{sa}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{dy_{sa}}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r \dot{\varphi},$$

$$w_{sa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z_{sa}}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r},$$

vagyis

$$\mathbf{v}_{sa} = r \cos \varphi \dot{\alpha} \mathbf{i}_{sa} + r \dot{\varphi} \mathbf{j}_{sa} + \dot{r} \mathbf{k}_{sa}.$$

A gyorsulás meghatározása azonban nem ennyire egyszerű, mert az abszolút szférikus rendszerben a bázisvektorok változása miatt a gyorsulás komponensei nem egyeznek meg a sebességkomponensek deriváltjaival.

A gyorsulás a Descartes-rendszerben:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt} \right),$$

Vagyis

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Az abszolút szférikus rendszerben azonban a gyorsulás komponensei nem olvashatók le a sebesség deriváltját megadó egyenletből:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} = \frac{d}{dt} (u_{sa} \mathbf{i}_{sa} + v_{sa} \mathbf{j}_{sa} + w_{sa} \mathbf{k}_{sa}) = \frac{du_{sa}}{dt} \mathbf{i}_{sa} + \frac{dv_{sa}}{dt} \mathbf{j}_{sa} + \frac{dw_{sa}}{dt} \mathbf{k}_{sa} + u_{sa} \frac{d\mathbf{i}_{sa}}{dt} + v_{sa} \frac{d\mathbf{j}_{sa}}{dt} + w_{sa} \frac{d\mathbf{k}_{sa}}{dt}$$

A gyorsuláskomponensek meghatározásához érdemes egyenként kifejezni a fenti egyenlet hat tagját, majd az abszolút szférikus rendszer bázisvektorai szerint rendezni az eredményt. A meteorológia számára alapvetőek a mérhető (u_{sa}, v_{sa}, w_{sa}) szélesebbéskomponensek, ezért az eredményt törekszünk mindenütt ezekkel a változókkal kifejezni.

Az első tag:

$$\frac{du_{sa}}{dt} \mathbf{i}_{sa} = \frac{d}{dt} \left(r \cos \varphi \frac{d\alpha}{dt} \right) \mathbf{i}_{sa} = (\dot{r} \cos \varphi \dot{\alpha} - r \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{\alpha} + r \cos \varphi \ddot{\alpha}) \mathbf{i}_{sa},$$

illetve lokális sebességekkel

$$\frac{du_{sa}}{dt} \mathbf{i}_{sa} = \left(r \cos \varphi \ddot{\alpha} + \frac{u_{sa} w_{sa}}{r} - \frac{u_{sa} v_{sa}}{r} \operatorname{tg} \varphi \right) \mathbf{i}_{sa}.$$

A második tag:

$$\frac{dv_{sa}}{dt} \mathbf{j}_{sa} = \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right) \mathbf{j}_{sa} = (\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{j}_{sa},$$

illetve a lokális sebességekkel

$$\frac{dv_{sa}}{dt} \mathbf{j}_{sa} = \left(r\ddot{\varphi} + \frac{v_{sa} w_{sa}}{r} \right) \mathbf{j}_{sa}.$$

A harmadik tag:

$$\frac{dw_{sa}}{dt} \mathbf{k}_{sa} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) \mathbf{k}_{sa} = \dot{r} \mathbf{k}_{sa},$$

illetve a lokális sebességekkel

$$\frac{dw_{sa}}{dt} \mathbf{k}_{sa} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) \mathbf{k}_{sa} = \dot{w} \mathbf{k}_{sa}.$$

A negyedik tag:

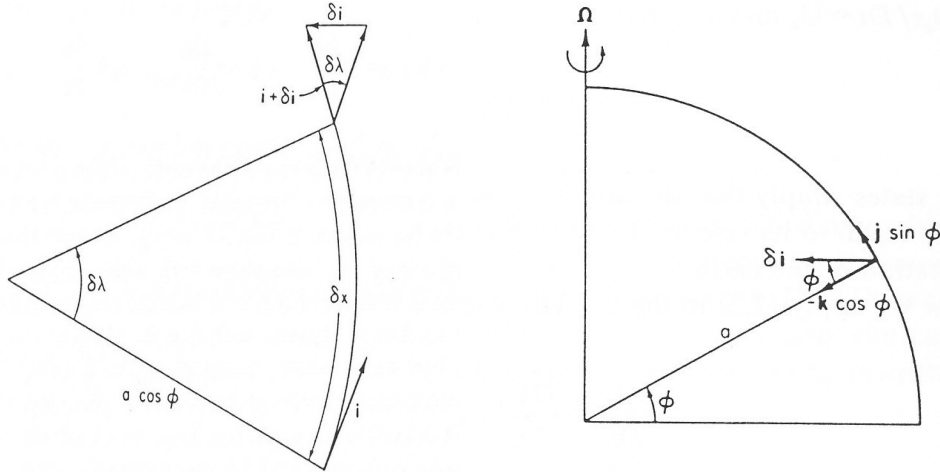
$$u_{sa} \frac{d\mathbf{i}_{sa}}{dt} = u_{sa} \left(\frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial t} + u_{sa} \frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial x_{sa}} + v_{sa} \frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial y_{sa}} + w_{sa} \frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial z_{sa}} \right).$$

Az \mathbf{i}_{sa} egységvektor teljes időbeli megváltozása négy tag összege. Természetesen az egységvektor adott helyen az időben nem változik $\left(\frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial t} = 0 \right)$. Nem változik az egységvektor hossza sem. Szintén nem változik az \mathbf{i}_{sa} egységvektor iránya, ha az elmozdulás sugár irányú, vagy ha hosszúsági kör mentén történik. Az eltolt és az eredeti egységvektort közös kezdőpontba hozva a különbségvektor nulla lesz $\left(\frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial y_{sa}} = 0, \frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial z_{sa}} = 0 \right)$.

Változik viszont az egységvektor iránya, ha a szélességi kör mentén mozdítjuk el, tehát:

$$u_{sa} \frac{d\mathbf{i}_{sa}}{dt} = u_{sa} \frac{\hat{\mathbf{a}}_{sa}}{\hat{\alpha}_{sa}}.$$

A Δx_{sa} távolságra elmozdított egységvektor és az eredeti \mathbf{i}_{sa} egységvektor különbsége a Föld forgástengelye felé mutat, és párhuzamos az Egyenlítő síkjával. (3. ábra.)



3. ábra. Az \mathbf{i}_{sa} egységvektor változása. A $\frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial x_{sa}}$ parciális derivált meghatározásának szemléltetése. Fig. 2.2. Holton J. R., 1972: An introduction to dynamic meteorology. Academic Press, New York and London. 25. oldal.

A 3. ábra szerint:

$$\frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial x_{sa}} = (\mathbf{j}_{sa} \sin \varphi - \mathbf{k}_{sa} \cos \varphi) \frac{d\alpha}{r \cos \varphi d\alpha} = (\mathbf{j}_{sa} \sin \varphi - \mathbf{k}_{sa} \cos \varphi) \frac{1}{r \cos \varphi},$$

tehát

$$\begin{aligned} u_{sa} \frac{d\mathbf{i}_{sa}}{dt} &= u_{sa} \frac{\partial \mathbf{i}_{sa}}{\partial x_{sa}} = r \cos \varphi \dot{\alpha} (\mathbf{j}_{sa} \sin \varphi - \mathbf{k}_{sa} \cos \varphi) \frac{r \cos \varphi \dot{\alpha}}{r \cos \varphi} = \\ &= r \sin \varphi \cos \varphi (\dot{\alpha})^2 \mathbf{j}_{sa} - r (\cos \varphi)^2 (\dot{\alpha})^2 \mathbf{k}_{sa}. \end{aligned}$$

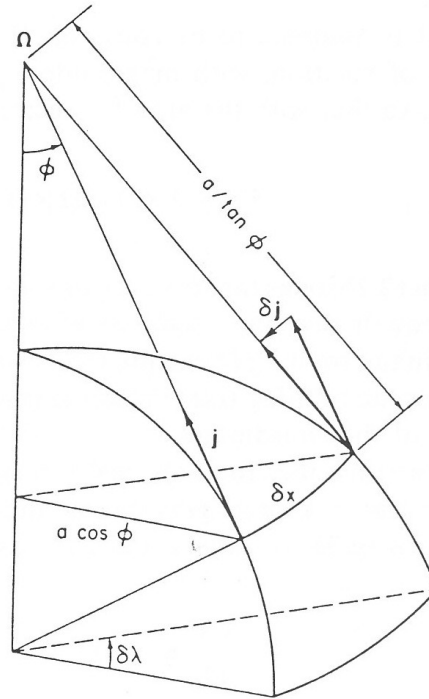
Az ötödik tag:

$$v_{sa} \frac{d\mathbf{j}_{sa}}{dt} = v_{sa} \left(\frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial t} + u_{sa} \frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial x_{sa}} + v_{sa} \frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial y_{sa}} + w_{sa} \frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial z_{sa}} \right).$$

Az egységvektor lokálisan nem változik $\left(\frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial t} = 0 \right)$. Nem változik az egységvektor akkor sem, ha az elmozdulás sugár irányú. $\left(\frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial z_{sa}} = 0 \right)$. Mind a szélességi, mind a hosszúsági kör menti elmozdulás során változik az egységvektor iránya.

$$v_{sa} \frac{d\mathbf{j}_{sa}}{dt} = v_{sa} \left(u_{sa} \frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial x_{sa}} + v_{sa} \frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial y_{sa}} \right).$$

Nézzük a \mathbf{j}_{sa} egységvektor elmozdulásait! Ha az egységvektort szélességi kör mentén keletre mozgatjuk, akkor a Δx_{sa} távolságra elmozdított és az eredeti egységvektor közötti különbségvektor nyugati irányú lesz. Nagyságát könnyen kiszámíthatjuk, ha a \mathbf{j}_{sa} egységvektor Egyenlítő síkjára eső vetületét vizsgáljuk a 4. ábra szerint.



4. ábra. A \mathbf{j}_{sa} egységvektor változása. A $\frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial x_{sa}}$ parciális derivált meghatározásának szemléltetése. Fig. 2.3 Holton J. R., 1972: An introduction to dynamic meteorology. Academic Press, New York and London. 26. oldal.

$$\frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial x_{sa}} = \frac{-\sin \varphi d\alpha}{r \cos \varphi d\alpha} \mathbf{i}_{sa} = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} \mathbf{i}_{sa} .$$

Ha a \mathbf{j}_{sa} egységvektort hosszúsági kör mentén mozgatjuk el Δy_{sa} távolságra, akkor a különbségvektor a Föld középpontja felé mutat, tehát ellentétes a \mathbf{k}_{sa} egységvektorral. Az elmozdulás az r sugarú körív mentén történik (5. ábra).

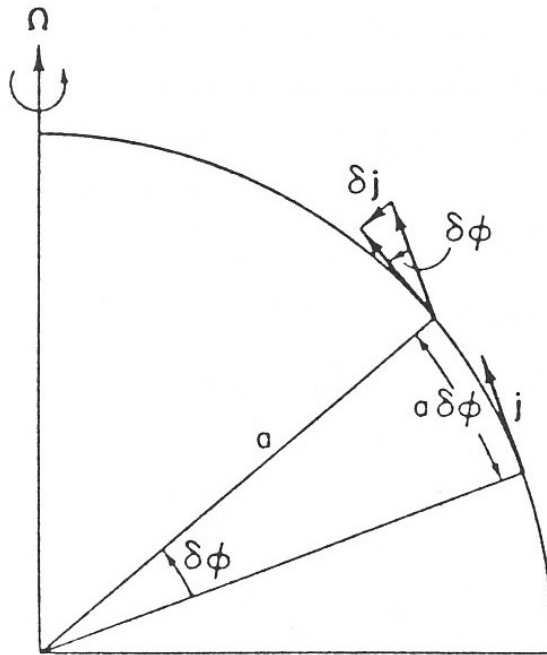
$$\frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial y_{sa}} = \frac{-d\varphi}{r d\varphi} \mathbf{k}_{sa} = -\frac{1}{r} \mathbf{k}_{sa} .$$

A két parciális derivált ismeretében most már felírhatjuk az 5. tagot is.

$$v_{sa} \frac{d\mathbf{j}_{sa}}{dt} = v_{sa} \left(u_{sa} \frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial x_{sa}} + v_{sa} \frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial y_{sa}} \right) = r\dot{\varphi} \left(-r \cos \varphi \dot{\alpha} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r} \mathbf{i}_{sa} - r\dot{\varphi} \frac{1}{r} \mathbf{k}_{sa} \right),$$

vagyis

$$v_{sa} \frac{d\mathbf{j}_{sa}}{dt} = -r \cos \varphi \dot{\alpha} \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi \mathbf{i}_{sa} - r\dot{\varphi}^2 \mathbf{k}_{sa}.$$



5. ábra. A \mathbf{j}_{sa} egységvektor változása. A $\frac{\partial \mathbf{j}_{sa}}{\partial y_{sa}}$ parciális derivált meghatározásának szemléltetése. Fig. 2.4 Holton J. R., 1972: An introduction to dynamic meteorology. Academic Press, New York and London. 26. oldal.

A hatodik tag:

$$w_{sa} \frac{d\mathbf{k}_{sa}}{dt} = w_{sa} \left(\frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial t} + u_{sa} \frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial x_{sa}} + v_{sa} \frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial y_{sa}} + w_{sa} \frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial z_{sa}} \right) = w_{sa} \left(u_{sa} \frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial x_{sa}} + v_{sa} \frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial y_{sa}} \right).$$

A \mathbf{k}_{sa} egységvektor a hosszúsági és a szélességi körök menti elmozdulása során változtatja meg az irányát. Ha a \mathbf{k}_{sa} egységvektort egy szélességi kör mentén keletre mozdítjuk, akkor megváltozik Egyenlítő síkjára eső vetülete. A különbségvektor keleti irányú lesz.

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial x_{sa}} = \frac{\cos \varphi d\alpha}{r \cos \varphi d\alpha} \mathbf{i}_{sa} = \frac{1}{r} \mathbf{i}_{sa}.$$

Hasonló változást figyelhetünk meg, ha a \mathbf{k}_{sa} hosszúsági kör mentén északra mozdul. A különbségvektor itt is az elmozdulás irányába, északra fog mutatni.

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial y_{sa}} = \frac{d\varphi}{r d\varphi} \mathbf{j}_{sa} = \frac{1}{r} \mathbf{j}_{sa} .$$

A hatodik tag alakja tehát:

$$w_{sa} \frac{d\mathbf{k}_{sa}}{dt} = w_{sa} \left(u_{sa} \frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial x_{sa}} + v_{sa} \frac{\partial \mathbf{k}_{sa}}{\partial y_{sa}} \right) = \cos \varphi \dot{r} \dot{\alpha} \mathbf{i}_{sa} + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{j}_{sa} .$$

X.2.2.1. Az abszolút szférikus rendszerbeli gyorsulás

A hat tag összeadásával kapjuk az abszolút szférikus rendszerbeli gyorsulás egyes komponenseit

$$\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}(\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\alpha}^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi \dot{\alpha}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \ddot{\alpha} + \frac{2u_{sa} w_{sa}}{r} - \frac{2u_{sa} v_{sa}}{r} \operatorname{tg} \varphi \\ r\ddot{\varphi} + \frac{2v_{sa} w_{sa}}{r} + \frac{2u_{sa} u_{sa}}{r} \operatorname{tg} \varphi \\ \ddot{r} - \frac{v_{sa}^2}{r} - \frac{u_{sa}^2}{r} \end{pmatrix} .$$

X.2.2.2. A Navier-Stokes egyenlet az abszolút szférikus rendszerben

Az egyenlet alakja:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} \right)_{sa} = - \frac{1}{\rho} \nabla_{sa} p - \nabla_{sa} \Phi_{sa} + \mathbf{F}_{sa}(\mathbf{v}_{sa}) ,$$

ahol

$$- \frac{1}{\rho} \nabla_{sa} p = - \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_{sa}} \\ \frac{\partial p}{\partial y_{sa}} \\ \frac{\partial p}{\partial z_{sa}} \end{pmatrix} , \quad - \nabla_{sa} \Phi_{sa} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_a \end{pmatrix} .$$

X.2.3. A relatív szférikus koordináta-rendszer

A meteorológiai folyamatokat az Ω szögsebességgel forgó Földön írjuk le. Ezért az abszolút szférikus rendszerről áttérünk a relatív szférikus rendszerbe. A meteorológiai gyakorlatban ezt a relatív, Ω szögsebességgel forgó rendszert használjuk. Így a továbbiakban e rendszert egyszerűen csak szférikus rendszernek nevezzük, és s indexszel jelöljük.

Helyezzük az abszolút szférikus rendszer középpontját a Föld középpontjába! A relatív szférikus rendszer független koordinátái:

a Föld középpontjától vett r távolság;

a φ földrajzi szélesség és

a λ földrajzi hosszúság.

Az abszolút szférikus rendszerbeli α és a relatív rendszerbeli λ szög (az adott hosszúsági kör) között fennáll az

$$\alpha = \Omega t + \lambda$$

összefüggés. Teljesül továbbá, hogy

$$\dot{\alpha} = \Omega + \dot{\lambda} \text{ és } \ddot{\alpha} = \ddot{\lambda}.$$

A szférikus rendszerbeli elemi elmozdulások:

$$dx_s = r \cos \varphi d\lambda, \quad dy_s = r d\varphi, \quad dz_s = dr,$$

Az elemi elmozdulások figyelembevételével az abszolút szférikus rendszerhez hasonlóan felírhatók a Lamé-együtthatók, illetve az elemi felületek és az elemi térfogat.

A koordináta-irányok szerinti sebességek az

$$\mathbf{r}_s = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

pontban:

$$u_s = \frac{dx_s}{dt} = \dot{x}_s = r \cos \varphi \dot{\lambda}, \quad v_s = \frac{dy_s}{dt} = \dot{y}_s = r \dot{\varphi}, \quad w_s = \frac{dz_s}{dt} = \dot{z}_s = \dot{r}.$$

A megfelelő koordináta-irányok szerinti gyorsulásokat úgy kapjuk, hogy a szférikus koordinátarendszerben kifejezett

$$\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}(\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\alpha}^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi \dot{\alpha}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \ddot{\alpha} + \frac{2u_{sa}w_{sa}}{r} - \frac{2u_{sa}v_{sa}}{r} \operatorname{tg} \varphi \\ r\ddot{\varphi} + \frac{2v_{sa}w_{sa}}{r} + \frac{2u_{sa}u_{sa}}{r} \operatorname{tg} \varphi \\ \ddot{r} - \frac{v_{sa}^2}{r} - \frac{u_{sa}^2}{r} \end{pmatrix}$$

gyorsulásokban elvégezzük az $\dot{\alpha} = \Omega + \dot{\lambda}$ és $\ddot{\alpha} = \ddot{\lambda}$ helyettesítést.

$$\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \ddot{\lambda} + 2(\Omega + \dot{\lambda})(\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r(\Omega + \dot{\lambda})^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi (\Omega + \dot{\lambda})^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \ddot{\lambda} + 2\dot{r}\Omega \cos \varphi + 2\dot{\lambda}\dot{r} \cos \varphi - 2r\dot{\varphi}\Omega \sin \varphi - 2r\dot{\varphi}\dot{\lambda} \sin \varphi \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + 2r\Omega\dot{\lambda} \cos \varphi \sin \varphi + r\dot{\lambda}^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\Omega^2 \cos^2 \varphi - 2r\Omega\dot{\lambda} \cos^2 \varphi - r\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

A gyorsulásban szereplő tagok most már kétféle koordináta-választásból adódó hatást is hordoznak. Egyrészt tartalmazzák a szférikus koordináta-rendszer bázisvektorainak változásából eredő hatásokat, másrészt megjelennek benne a a forgó koordináta-rendszer mint gyorsuló koordináta-rendszer hatásai.

A gyorsulást a lokális koordináta-rendszerben mérhető mennyiségek, tehát az $u_s = r \cos \lambda$, $v_s = r\dot{\varphi}$, $w_s = \dot{r}$ lokális szélesség-komponensek és $\dot{u}_s, \dot{v}_s, \dot{w}_s$ gyorsulásaik segítségével érdemes kifejezni. Ez a mennyiség éppen a lokális forgó szférikus rendszerhez képest vett gyorsulást adja meg.

Az

$$\dot{u}_s = \dot{r} \cos \varphi \dot{\lambda} - r \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{\lambda} + \dot{r} \cos \varphi \ddot{\lambda}$$

$$\dot{v}_s = \dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

$$\dot{w}_s = \ddot{r}$$

sebességderiváltak könnyen felismerhetőek az abszolút gyorsulásban, ha kissé átrendezzük azt:

$$\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi}\dot{\lambda} \sin \varphi + 2\dot{r}\Omega \cos \varphi + \dot{\lambda}\dot{r} \cos \varphi - 2r\dot{\varphi}\Omega \sin \varphi - r\dot{\varphi}\dot{\lambda} \sin \varphi \\ r\ddot{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\varphi} + r\Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + 2r\Omega\dot{\lambda} \cos \varphi \sin \varphi + 2r\dot{\lambda}^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\Omega^2 \cos^2 \varphi - 2r\Omega\dot{\lambda} \cos^2 \varphi - r\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}.$$

A szférikus sebességek értelmezését, a sebességkomponensek fenti megadott deriváltjait, valamint a Föld szögsebesség-komponenseivel értelmezett $f = 2\Omega \sin \varphi$, $l = 2\Omega \cos \varphi$ Coriolis-paraméterek definícióját felhasználva az abszolút gyorsulás komponensei a

$$\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{u}_s + lw_s + \frac{w_s u_s}{r} - fv_s - \frac{u_s v_s}{r} \operatorname{tg} \varphi \\ \dot{v}_s + r\dot{\varphi} + \frac{w_s v_s}{r} + r\Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + fu_s + \frac{u_s u_s}{r} \operatorname{tg} \varphi \\ \dot{w}_s - \frac{v_s v_s}{r} - r\Omega^2 \cos^2 \varphi - lu_s - \frac{u_s u_s}{r} \end{pmatrix}$$

alakban is felírhatók. A második és harmadik komponensben szereplő $r\Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi$ és $-r\Omega^2 \cos^2 \varphi$ tagról az ábra alapján adódik, hogy a centripetális gyorsulás északi irányú és vertikális komponensének felelnek meg.

X.2.4. A mozgásegyenletek alakja a forgó Földön

Az abszolút gyorsulást megadó formulából kifejezhetjük a relatív gyorsulásokat:

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} \right)_{xa} + fv_s - lw_s - \frac{u_s v_s}{r} + \frac{u_s v_s}{r} \operatorname{tg} \varphi \\ \frac{dv_s}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} \right)_{ya} - fu_s + F_{cf} \sin \varphi - \frac{w_s v_s}{r} - \frac{u_s u_s}{r} \operatorname{tg} \varphi \\ \frac{dw_s}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{v}_{sa}}{dt} \right)_{za} + lu_s - F_{cf} \cos \varphi + \frac{u_s u_s}{r} + \frac{v_s v_s}{r} \end{aligned}$$

Ha az abszolút gyorsuláskomponensek helyébe a Newton törvény értelmében beírjuk a légkörben ható erőket, akkor megkapjuk a mozgásegyenletek relatív koordinátarendszerben használatos alakját.

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{sx} + fv_s - lw_s - \frac{u_s v_s}{r} + \frac{u_s v_s}{r} \operatorname{tg} \varphi \\ \frac{dv_s}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{sy} - fu_s + F_{cf} \sin \varphi - \frac{w_s v_s}{r} - \frac{u_s u_s}{r} \operatorname{tg} \varphi, \\ \frac{dw_s}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_{sz} - g + lu_s - F_{cf} \cos \varphi + \frac{u_s u_s}{r} + \frac{v_s v_s}{r} \end{aligned}$$

A gyorsuló koordinátarendszerben szokásos értelmezés szerint az egyenletek jobb oldalán megjelennek a valódi erők, a gradiens erő $(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z})$, a súrlódási erő (F_{sx}, F_{sy}, F_{sz}) és a gravitációs erő $(0, 0, -g)$ komponensei mellett a tehetetlenségi erők, a Coriolis-erő $(fv_s - lw_s, -fu_s, lu_s)$ és a centrifugális erő $(F_{cf} \sin \varphi, -F_{cf} \cos \varphi)$ összetevői. Az egyenletekben található további tagok az úgynevezett metrikus gyorsulások, amelyek a szférikus koordináta-rendszer alkalmazásának következményei. Ismételten felhívjuk a figyelmet arra, hogy a mozgásegyenleteket egységnyi tömegű levegőre írtuk fel, ezért az egyenletekben szereplő tagok gyorsulás dimenziójúak.

X.2.5. A Föld geoid alakja

Korábban megállapítottuk, hogy mind a gravitációs, mind a centrifugális erő potenciális, ezért a két erőt összegezve effektív gravitációs erőt definiálhatunk:

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} + \mathbf{r}_\perp \Omega^2,$$

ahol \mathbf{r}_\perp nagysága a Föld forgástengelyétől mért távolság, iránya pedig a tengelytől kifelé mutat. A gömbi koordináta-rendszerben bevezetett jelölésekkel $|\mathbf{r}_\perp| = r \cos \varphi$. Az előző fejezetben a nehézségi erő definiálásakor is hasonló utat követtünk, de ott a gravitációs erő irányának változásától eltekintettünk. A gömb alakú Földön a gravitációs erő a Föld középpontja felé mutat, a centrifugális és a gravitációs eredője, a \mathbf{g}_e effektív gravitációs erő azonban kissé eltér ettől az iránytól, ami azt eredményezi, hogy az effektív gravitációs erőnek van a horizontális síkba eső összetevője.

Az effektív gravitációs erőt a gravitációs erőhöz hasonlóan potenciálból származtathatjuk:

$$\mathbf{g}_e = -\nabla \Phi_e.$$

Az állandó potenciálú felületek azonban most már nem gömbfelületek, hanem kissé lapult alakzatok. Mint már megállapítottuk, a centrifugális erő sokkal kisebb a gravitációsnál, nagyságuk aránya a Föld felszínén közelítőleg $3 \cdot 10^{-3}$. Így az effektív gravitációs erő irányának a gravitációs erőtől való eltérése közelítőleg ennyi radián. Emiatt ez a hatás többnyire elhanyagolható.

A meteorológiában a légtömegek horizontális mozgásában döntő szerepet játszik a Coriolis-erő, amelyhez képest közepes szélességeken a centrifugális erő horizontális komponense nagy lehet:

$$\frac{F_{\text{cfhorizontális}}}{F_{\text{Co}}} = \frac{R_{\text{Föld}} \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi}{u 2 \Omega \sin \varphi} \approx \frac{R_{\text{Föld}} \Omega}{4u} \approx 10.$$

Amennyiben tehát ragaszkodunk a pontosan gömb alakú Föld elképzeléséhez, akkor horizontálisan is a vertikálishoz hasonló hidrosztatikus hatások alakítanak a légkör egyensúlyát. (A geosztrofikus egyensúly helyett a nyomásgradiens és a centrifugális erő kerülne egyensúlyba.)

Az ellentmondást azzal oldjuk fel, hogy az effektív geopotenciál gradiensének irányát tekintjük a továbbiakban függőleges irányúnak. Ekkor a centrifugális erőnek nincsen horizontális komponense. Ugyanakkor azonban minden geometriai számításban az ekvipotenciális felületet gömbbel közelítjük. Így kicsiny geometriai hiba árán nagy dinamikai hibát okozó hatástól szabadulhatunk meg!

Az idők során a Föld be is állította ezt az egyensúlyt. Az egyenlítőnél kihasodott, és felvette az effektív geopotenciál megfelelő ekvipotenciális felületének alakját. Ezt az alakzatot geoidnak nevezzük. Ez azt jelenti, hogy az effektív gravitációs erő iránya adott helyen jó közelítéssel merőleges a Föld felszínére.

A geopotenciál ennek megfelelően csak a magasság függvénye, és amikor a gömbi koordinátákat használjuk, akkor r értékét mindenütt a Föld felszínére merőleges irányban mérjük fel. Ezt azért tehetjük meg, mert a Föld lapultsága rendkívül kicsiny. (A Föld poláris átmérője 12714 km, egyenlítői átmérője pedig 12756 km.)

A geoid alakú Föld következménye, hogy a nehézségi gyorsulási erő (a helyi függőleges iránya) nem pontosan a Föld középpontjába mutat. Az eltérés szöge \mathcal{J} .

Gyakorlati számításokban kihasználjuk, hogy $\varphi \gg \mathcal{J} > 0$, továbbá

$$\cos(\varphi + \mathcal{J}) \approx \cos \varphi, \quad \sin(\varphi + \mathcal{J}) \approx \sin \varphi.$$

A továbbiakban az effektív gravitációs gyorsulást nem különböztetjük meg nehézségi ill. gravitációs gyorsulástól, és gravitációs gyorsulásként a

$$g = g_a \cos \mathcal{J} - r\Omega^2 \cos^2 \varphi$$

kifejezést használjuk. Ismételten megjegyezzük, hogy a numerikus modellekben alkalmazott szférikus rendszerben a koordinátázást tekintve gömb alakú Földdel dolgoznak. A geoid alakot a nehézségi gyorsulás nagyságában vesszük figyelembe. A centrifugális erőt, mint kényszererőt, beépítjük a gravitációs erőbe.

A modellekben eltekintenek a gravitációs erő és a helyi függőleges közötti eltérésektől, tehát a szférikus rendszerben a gravitációs erő „mégiscsak” a Föld középpontja fele mutat. Ez a közelítés érthető, hiszen a gravitációs erő nagyságát helyesen írtuk fel, s így a gömb alakú Föld már nem a meghatározó hibaforrása a légköri modelleknek. Sokkal nagyobb problémát jelent pl. a kezdeti- és peremfeltételek pontatlansága, a modellegenletekben alkalmazott elhanyagolások, a parametrizációs eljárások pontatlansága és nem teljes volta, továbbá az egyenletek megoldásakor jelentkező numerikus módszerekben és a számítógép számábrázolásában rejlő hiba.

X.3. A hidro-termodinamikai egyenletrendszer alakja a forgó Földön

X.3.1. A mozgásegyenletek

Felhasználva, hogy a centrifugális erőt beépíthetjük a gravitációs erőbe, a mozgásegyenletek

$$\frac{du_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_s} + fv_s - lw_s + \frac{u_s v_s}{r} \operatorname{tg} \varphi - \frac{u_s w_s}{r} + F_{sx},$$

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_s} - fu_s - \frac{u_s u_s}{r} \operatorname{tg} \varphi - \frac{v_s w_s}{r} + F_{sy},$$

$$\frac{dw_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} - g + lu_s + \frac{u_s u_s}{r} + \frac{v_s v_s}{r} + F_{sz},$$

ahol $l = 2\Omega \cos \varphi$ a Coriolis-erő általános alakjában szereplő paraméter.

X.3.2. A kontinuitási egyenlet

A kontinuitási egyenlet átírásának kulcsa a sebesség-divergencia felírása szférikus rendszerben. Ezt könnyen megadhatjuk a Lamé-féle együtthatók

$$r_{xs} = r \cos \varphi, \quad r_{ys} = r, \quad r_{zs} = 1$$

alapján, illetve a sebességkomponensek és az elemi elmozdulások ismeretében.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_s &= \frac{1}{r_{xs} r_{ys} r_{zs}} \left[\frac{\partial (u_s r_{ys} r_{zs})}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v_s r_{xs} r_{zs})}{\partial \varphi} + \frac{\partial (w_s r_{xs} r_{ys})}{\partial r} \right] = \\ &= \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left[\frac{\partial (r^2 \cos \varphi \dot{\lambda})}{\partial \lambda} + \frac{\partial (r^2 \cos \varphi \dot{\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial (r^2 \cos \varphi \dot{r})}{\partial r} \right] = \\ &= \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left[r^2 \cos \varphi \frac{\partial (\dot{\lambda})}{\partial \lambda} + r^2 \cos \varphi \frac{\partial (\dot{\varphi})}{\partial \varphi} - r^2 \sin \varphi \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} + r^2 \cos \varphi \frac{\partial (\dot{r})}{\partial r} + 2r \cos \varphi \dot{r} \frac{\partial r}{\partial r} \right] = \\ &= \frac{\partial u_s}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial y_s} + \frac{\partial w_s}{\partial z_s} - \frac{v_s}{r} \operatorname{tg} \varphi + \frac{2w_s}{r} \end{aligned}$$

A kontinuitási egyenlet (kihasználva, hogy a skalármező teljes időbeli megváltozását leíró tag formailag nem változik):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial y_s} + \frac{\partial w_s}{\partial z_s} - \frac{v_s}{r} \operatorname{tg} \varphi + \frac{2w_s}{r} \right).$$

X.3.3. A termodinamikai egyenlet

A termodinamikai egyenlet csak invariáns időderiváltat tartalmaz, ezért

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{c_p T} \frac{dQ}{dt}.$$

alakja változatlan.

X.3.4. A nedvességszállítási egyenlet

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt}.$$

A termodinamikai egyenlethez hasonlóan ennek alakja sem változik.

X.3.5. Az állapotegyenlet

$$\frac{p}{\rho} = RT .$$

Az állapotegyenlet alakja is változatlan.