

EGY EGYSZERŰSÍTETT GLOBÁLIS SZÉN- DIOXID-MODELL ÉS NUMERIKUS VIZSGÁLATA

Szakedolgozat
Földtudomány alapszak
Meteorológia szakirány



Készítette: Brajnovits Brigitta

Témavezető: Dr. Havasi Ágnes

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Földrajz- és Földtudományi Intézet
Meteorológiai Tanszék

Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. A modell felépítése	5
3. A felhasznált numerikus módszerek rövid leírása	13
4. Eredményeink	18
4.1. Az óceán savasodása	29
5. Összefoglalás	32
6. Köszönetnyilvánítás	33
7. Irodalomjegyzék	34

1. Bevezetés

Napjaink igen fontos kérdése a klímaváltozás. Sokakat tölt el jogos aggodalommal a globális felmelegedés. Az ipari forradalom óta az ember által a légkörbe juttatott különböző szennyezőanyagok befolyásolják Földünk klímájának alakulását. Megváltoztatják az üvegházhatás mértékét, ill. bizonyos gázok roncsolják az ózonréteget, ezzel egészen más jellegű problémát generálva.

A klímakutatásban egyre több szempontot szeretnénk figyelembe venni, hogy eredményeink a lehetőségekhez mérten a lehető legpontosabbak legyenek. Ez nagy mennyiségű adathalmaz feldolgozását igényli, amit számítógépes modellek futtatásával hajtunk végre. A számítógépek kapacitásának folyamatos növekedésével egyre komplexebb modellek állíthatók össze. Azonban számos esetben a természetben lejátszódó folyamat megértéséhez egyszerűbb modell is elegendő, mely csak a vizsgált jelenségben szerepet játszó néhány legfontosabbnak vélt mechanizmust foglalja magába.

A klímaváltozás esetében beszélhetünk a szén-dioxid (CO_2) - mint legfőbb üvegházgáz – mennyiségének változásáról. Mivel az antropogén kibocsátás következtében légköri mennyisége jelentősen megnőtt, ezért a CO_2 folyamatainak vizsgálata sarkalatos kérdés. A CO_2 legfőbb forrása a fosszilis tüzelőanyagok – a kőolaj és földgáz – égetése, nyelői között pedig óriási szerep jut a bioszféra mellett az óceánnak. Az óceáni hidroszféra hatalmas mennyiségű szén-dioxidot raktároz, és a légkörbe juttatott CO_2 jelentős részét képes elnyelni. Így azon túlmenően, hogy a CO_2 módosítja a Föld éghajlatát, az óceáni ökoszisztémára is befolyással van.

Az éghajlati rendszer egyes tartományai szoros kapcsolatban állnak egymással, így ha az egyikben valamilyen változás zajlik le, az hatással lesz az éghajlati rendszer más elemeire is. Így van ez a légkör és az óceán esetében is (Bacastow et al., 1972). Az ember által a légkörbe juttatott szén-dioxid-koncentrációjának növekedése együtt jár az óceán szén-dioxid-koncentrációjának növekedésével. Az óceánba jutó CO_2 feloldódik a vízben, ami az óceán pH-jának csökkenésével, azaz az óceán savasodásával jár.

Munkánk során egy angol-amerikai együttműködésben készült egyszerűsített globális szén-dioxid-modellt tanulmányoztunk (Griffiths et al., 2008, Brajnovits és Kelemen, 2009) és írtunk át, amely az antropogén szén-dioxid-kibocsátás hosszú távú hatásait

szimulálja egy hét egyenletből álló közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásával. Ezt egy Matlabba beépített, nagy pontosságú megoldómódszerrel teszi. A modell különböző időskálákon végbemenő folyamatokat ír le, ezért az egyenletek enyhén merev (stiff) rendszert alkotnak. A merev rendszerek megoldása a numerikus módszer körültekintő megválasztását igényli.

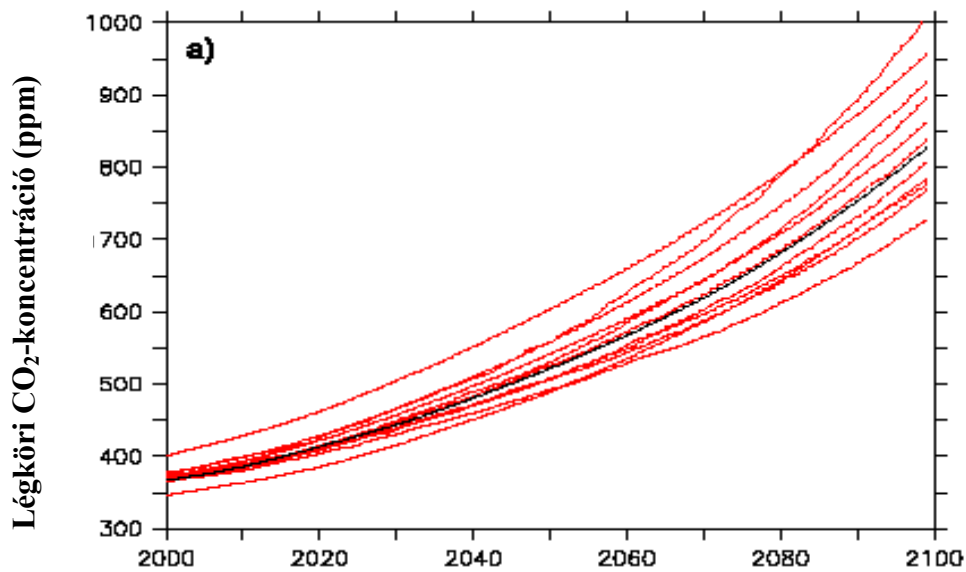
A dolgozatban megvizsgáljuk a modell működését, a benne lévő egyszerűsítések okát és alkalmazhatóságát, valamint az eredmények kiszámításának módját. A következőkben bemutatjuk az általunk felhasznált modell felépítését, majd röviden ismertetjük az alkalmazott numerikus módszereket. A numerikus módszerek működését és eredményét egy egyszerű példán szemléltetjük. Megnézzük, hogy ez a feladat miért nevezhető enyhén stiffnek. Végül kiértékeljük a három numerikus módszerrel kapott eredményeket, a modell viselkedését négy különböző emissziós függvényre, illetve megnézzük, hogy hogyan viselkedik a rendszer hosszabb, 650 éves időtartamra, mutatja-e a komoly egyszerűsítések ellenére is a várható tendenciát.

2. A modell felépítése

A szén-dioxid koncentrációjának változása egy komplex és még nem teljesen megértett probléma. Ennek ellenére eleget tudunk a CO₂ körforgásáról ahhoz, hogy kvantitatívan leírassuk azon legalapvetőbb fizikai és kémiai folyamatokat, amelyek végbemennek a gázzal (Walker, 1991). Így előrejelezhetjük, hogyan fog növekedni a jövőben a szén-dioxid-szint.

A modell, amellyel foglalkozunk, alapvető mechanizmusokat vesz csak figyelembe, és ezek segítségével tanulmányozza a CO₂ mennyiségének alakulását.

Hosszútávra visszamenőleg össze tudjuk hasonlítani a mai szén-dioxid-szintet a múltbeli értékekkel. Erre jégfurat-minták analizálásával adódik lehetőségünk. (Doney, 2006) A jégben található légbuborékokban elraktározódott információra építünk, amikor azt mondjuk, hogy antropogén hatásra nőtt meg a légkörben a CO₂ mennyisége. Ugyanis a minták analizálásából kiderült, hogy a szén-dioxid-koncentráció hozzávetőleg változatlan volt az elmúlt néhány ezer évben, és az iparosodással az 1800-as évektől gyors növekedésnek indult a mennyisége. A CO₂ ma már 30%-kal gyakoribb a légkörben, mint alig néhány száz éve, és várhatóan az évszázad végére megduplázza, esetleg megtriplázza korábbi konstans értékét (1. ábra.).



1. ábra. A CO₂ koncentrációjának várható alakulása 2000 és 2100 között. Forrás: IPCC, Fourth Assessment.

A modell szükségszerűen leegyszerűsítése a szén-dioxid-szintet meghatározó folyamatoknak. Mindezek ellenére betekintést enged a gáz dinamikájába, így tanulmányozhatók rajta a szén-dioxid-szint időbeli változásában leginkább szerepet játszó mechanizmusok. A paraméterek változtatásával pedig elemezhető, hogy mennyire érzékeny a beálló szén-dioxid-egyensúly az inputokra. Az inputok variálásával más-más szint jelentkezik a jövőben. Ezt az emissziós függvények megváltoztatásával vizsgálhatjuk meg. A modell előnye még, hogy mivel az egyetlen forrástag az ember által kibocsátott szén-dioxid-mennyiség, könnyű kiszámítani, hogy a különböző emissziós függvényeknek milyen a jövőbeli hatása.

A modell egy közös differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldásán alapul, amelyhez ismert múltbeli kezdeti értékeket adunk meg. Alapbeállításban az 1850-es évtől kezd integrálni - de a kezdő évszám egyszerűen megváltoztatható -, és 2100-ig mutatja meg a gáz mennyiségének várható alakulását. Az integrálás végpontját is könnyedén megváltoztathatjuk, így hosszabb időre előrejelezhetjük a gáz mennyiségének várható alakulását. További feltételek megadásával bővíthető a program. A megadott négy emissziós függvény mellé beprogramozhatunk továbbiakat (Kelemen, 2009), változtathatjuk a vizsgált folyamat időintervallumát, és a lépésköz finomításával pontosíthatjuk eredményeinket.

A modell csak a szén-dioxiddal foglalkozik, nincs jövőnk klímáját meghatározó komponense, mely rámutatna esetleges hőmérséklet- vagy klímaváltozásra. Csak az egyes tározókba történő elkeveredéssel foglalkozik, jelentősen leegyszerűsített egyenletekkel számolva.

Míg a jelenlegi szén-dioxid-koncentráció szintjét meg tudjuk határozni mérésekkel, annak tényleges hatása a Föld klímájára még a mai napig sem teljesen tisztázott. A modell nem magyarázza meg az eredmények által okozott, illetve mellettük bekövetkezett éghajlatváltozást vagy más következményeket. Egy kivétel azonban mégis van, ugyanis a modell végez számításokat az óceán pH-jának jövőbeli alakulására. Habár ez a probléma sem teljesen ismert, néhány dolog biztosan elmondható ezzel a folyamattal kapcsolatban:

- Az óceánok pH-értéke csökken, és ez mérhető.
- A savasodás hatása megfigyelhető a korallokon és más szilárd vázat kiválasztó tengeri élőlényeken, amelyek fő alkotóeleme a kalcium-karbonát (Hoegh-Guldberg, 2008). A kalcium-karbonát kiválásának nem kedvez a savas környezet.

A fosszilis tüzelőanyagok égetésével keletkező CO₂ mintegy harmada az óceánba kerül. A lejátszódó reakciólánc a következő:



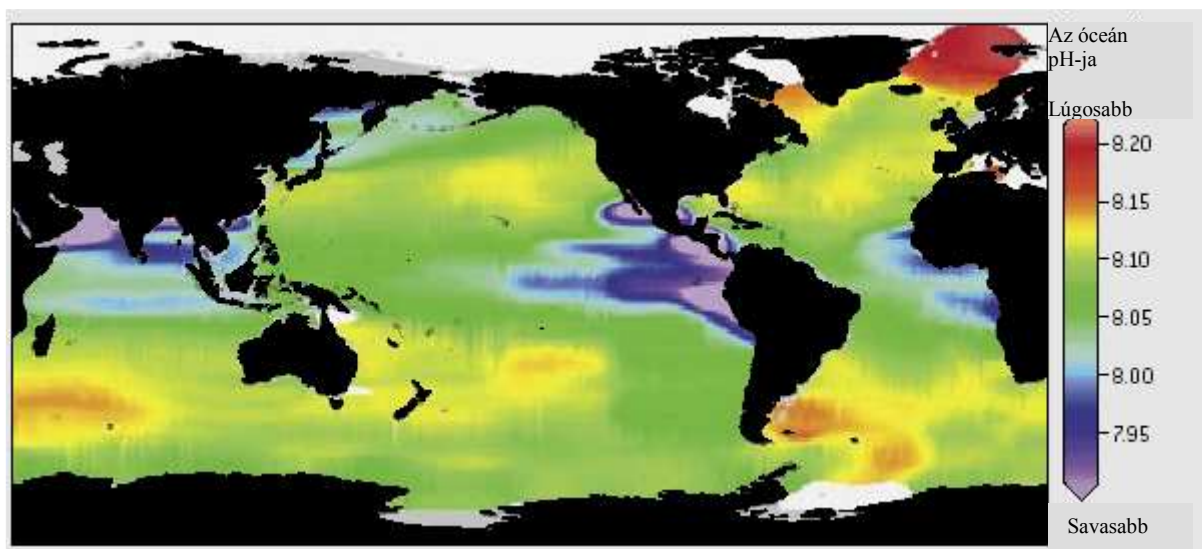
Ezek az egyenletek a folyamatot leegyszerűsítve írják le. Valójában a légkörből az óceánba kerülő CO₂ feloldódik a tengervízben, szénsavat képezve. A szénsav disszociál bikarbonát- és hidrogén-ionra. A bikarbonát-ion tovább bomlik karbonát- és hidrogén-ionra, így végeredményben a CO₂ vízbe kerülésével két hidrogén-ion keletkezik.

A pH értékét pedig megkaphatjuk a következő egyenletből:

$$pH = -\lg[H^+] \quad \{3\}$$

Látható, hogy az oldódás során nő az óceánvízben a H⁺ - ion koncentrációja, ami csökkenti a pH értékét, azaz az óceán elsavasodásához vezet (Caldeira et al, 2003). A

H^+ - ion koncentrációjának változásával megváltozik a karbonát és bikarbonát ionok egyensúlya. Ez a folyamat veszélyezteti azokat a tengeri élőlényeket, amelyek kalcium-karbonátból építenek szilárd vázat. Már most is kimutatható, hogy a dél-Atlanti-óceán felső néhány száz méterében magasabb az oldott szén-dioxid koncentrációja, mint a nem is olyan távoli múltban. Az elsavasodás veszélyt jelent a különböző planktonokra (Iglesias-Rodriquez et al., 2008), valamint a korallzátonyokra, amelyek az óceán biológiailag legösszetettebb és legproduktívabb ökoszisztémái. Normál körülmények között az óceán mély és hideg vizei vannak annyira savasak, hogy feloldják a tengeri élőlények kalcium-karbonátból álló vázát. Ennek a rétegnek a határát nevezik telítettségi horizontnak, mert az alatta lévő réteg az élőlények vázát alkotó karbonátvegyületekre (kalcit és aragonit) nézve telítetlen. A felső meleg óceáni réteg viszont telített, így kedvező környezetet jelent a meszes vázat kiválasztó élőlények számára. Az atmoszférából az óceánba kerülő nagy mennyiségű CO_2 hatására a telítettségi horizont 50-200 méterrel feljebb tolódott az 1800-as évekhez képest. A kutatók korábban azt gondolták, hogy az óceán savasodása nem fogja veszélyeztetni a vízi élővilágot, hiszen a felszíni víz mindig is túltelített marad majd, és az élőlényeknek csak erre van szükségük. Ezt cáfolta meg az a kutatási eredmény, amely kimutatta, hogy a korallok kalcium-karbonát-kiválasztása csökkent állandó túltelítettség, de csökkenő pH-érték mellett (Doney, 2006). Ebből is látszik, hogy az óceán pH-változásának vizsgálata is rendkívül fontos, és mivel szoros kapcsolatban van az antropogén szén-dioxid-emisszióval, várható értékének kiszámítása belekerült a modellbe is.



2. ábra. Az óceán pH-értéke napjainkban. Forrás: Doney, 2006.

A modellben hét globális szén-dioxid-tározóban vizsgáljuk a CO₂ körforgalmát, amelyek a következők:

- Felsőléggör (upper atmosphere - ua)
- Alsóléggör (lower atmosphere - la)
- Rövid életű élőlények (short-lived biota - sb)
- Hosszú életű élőlények (long-lived biota - lb)
- Felső óceáni réteg (upper ocean layer - ul)
- Mélyóceáni réteg (deep ocean layer - dl)
- Tengeri élővilág (marine biota - mb)

Ez a hét réteg fontos résztvevője a globális szén-dioxid-rendszernek. További tározók helyezhetők a modellbe, illetve vehetők ki onnan. Más modellekben megfigyelhető, hogy a CO₂ tározókat más rendszer szerint választják szét, nem számolnak esetleg két óceáni réteggel, hanem egységként kezelik az óceánt (Caldeira et al., 2005; Kelemen, 2009).

Mindegyik tározó fontos hatással van a CO₂ dinamikájára. A modell tározónként csak egy koncentrációértékkel számol, mindegyik rétegben homogén szén-dioxid-eloszlást feltételezve, vagyis nem vesz figyelembe lokális különbségeket. Más szóval feltételezzük a tározókon belüli teljes elkeveredést. A szén-dioxid-koncentráció minden tározóban csak az időtől függ, így a differenciálegyenlet-rendszerben is az idő az egyetlen független változó.

Az időfüggés a rendszerben azért jön létre, mert az antropogén szén-dioxid-kibocsátás inputként megjelenik az alsó atmoszférában. Innen a többi tározóba is bekerül elkeveredés útján.

Az egyenletekben szereplő, lényegesen különböző koncentrációértékek könnyebb kezelhetősége céljából az összes tározóhoz tartozó értéket egy közös skálára hozták a koncentrációk dimenziótlánításának segítségével:

$$C(t) = \frac{C \dim(t) - C \dim(t = 1850)}{C \dim(t = 1850)} \quad \{4\}$$

$$C(t = 1850) = \frac{C \dim(t = 1850) - C \dim(t = 1850)}{C \dim(t = 1850)} = 0 \quad \{5\}$$

Így az összes kezdeti, 1850-es koncentrációérték nullával lesz egyenlő. Ezáltal grafikonon megjelenítve jobban látható az egyes tározók egymáshoz képesti koncentrációváltozása. Az eredmények természetesen kifejezhetők dimenziós mennyiségekként is, ami segíti az eredmények analizálását.

A tározókra felírt koncentrációváltozások egyenletei a következők. Itt $\tau(1-2)$ azt az átlagos ún. tartózkodási időt jelöli, amíg a CO_2 a kettes tározóból az egyesbe jut.

$$\begin{aligned} \frac{dC_{la}}{dt} = & \frac{1}{\tau(la-ua)}(C_{ua}-C_{la}) + \frac{1}{\tau(la-sb)}(C_{sb}-C_{la}) + \frac{1}{\tau(la-lb)}(C_{lb}-C_{la}) + \\ & + \frac{1}{\tau(la-ul)}(C_{ul}-C_{la}) + Q_c(t) \end{aligned} \quad \{6\}$$

$$\frac{dC_{ua}}{dt} = \frac{1}{\tau(ua-la)}(C_{la}-C_{ua}) \quad \{7\}$$

$$\frac{dC_{sb}}{dt} = \frac{1}{\tau(sb-la)}(C_{la}-C_{sb}) \quad \{8\}$$

$$\frac{dC_{lb}}{dt} = \frac{1}{\tau(lb-la)}(C_{la}-C_{lb}) \quad \{9\}$$

$$\frac{dC_{ul}}{dt} = \frac{1}{\tau(ul-la)}(C_{la}-C_{ul}) + \frac{1}{\tau(ul-dl)}(C_{dl}-C_{ul}) + \frac{1}{\tau(ul-mb)}(C_{mb}-C_{ul}) \quad \{10\}$$

$$\frac{dC_{dl}}{dt} = \frac{1}{\tau(dl-ul)}(C_{ul}-C_{dl}) \quad \{11\}$$

$$\frac{dC_{mb}}{dt} = \frac{1}{\tau(mb-ul)}(C_{ul}-C_{mb}) \quad \{12\}$$

$$Q_c(t) = c_1 \exp(r_1 t). \quad \{13\}$$

Az egyenletek megmutatják, hogy az egyes tározókba honnan kerül be, illetve belőlük hova keveredik a CO_2 . Az első, legösszetettebb egyenletünk az alsólégrére vonatkozik. Ez az a tározó, amelyben a CO_2 forrástagja megjelenik. Ebből a rezervoárból a CO_2 átkeveredik a felsőlégrébe, a rövid és hosszú életű élővilágba, valamint az óceán felső rétegébe, az input tag pedig az emberi forrástag.

A modell egyenletei megfelelnek az elvárásainknak, mert kiolvasható a koncentrációértékek megváltozásából, hogy melyik rétegben növekszik a szén-dioxid-mennyiség, és melyikben csökken.

A szén-dioxid-fluxus két tározó között le van egyszerűsítve egyetlen paraméterre, a τ tartózkodási időre. Ez azért tehető meg, mert a modell nem reagál érzékenyen a τ kis változásaira.

Az egyenletekben az egyik legfontosabb tag az antropogén forrástag, hiszen a kezdeti koncentrációértékek csak az antropogén kibocsátás hatására nőnek.

Az egyenletrendszer, mint már említettük, enyhén stiff. Stiff rendszerről akkor beszélünk, ha az együtthatómátrix sajátértékei között több nagyságrendbeli eltérés van. Ez könnyen előfordulhat akkor, ha az egyik sajátérték a 0, mint ahogyan a mi esetünkben is. Ilyen problémáknál az explicit módszerek csak igen kicsiny lépésköz esetén működnek, egyébként instabillá válnak, ill. oszcillációt mutatnak (Lambert, 1991).

Az általunk használt modell felépítése, szerkezete lehetővé teszi a program könnyed megértését és használatát.

A program Matlabban íródott, és egy főrészből áll, amely különböző szubrutinokat hív meg a bonyolultabb számítások elvégzéséhez. A változókat ezekben az alprogramokban adjuk meg, és itt lehet megváltoztatni azok értékeit is. A programban alapértelmezésben használt közönséges differenciálegyenlet-rendszert megoldó módszer – a Matlabba beépített ode15s – a főprogramban kerül meghívásra, és itt az eredmény pontosságát is beállíthatjuk. Munkánk során ezt a numerikus módszert helyettesítettük más módszerekkel, nevezetesen az explicit Euler-, az implicit Euler, illetve a középponti módszerrel, továbbá helyenként néhány egyéb modellparamétert módosítottunk. A numerikus séma pontosságának vizsgálatához lefuttattam a programot a θ paraméter más értékeivel is. Referenciamegoldásként az ode15s programmal előállított, nagy pontosságú numerikus megoldást használtuk.

A főprogramban csupán az időlépcső hosszát, a számítás kezdeti és végpontját, a széndioxid-emisszió mértékét és az együtthatómátrixot kellett megadnunk, a többi adatot és számítást a szubrutinok meghívásával építettük be.

Mi a program gerincében és a meghívott programokban is jelentős változtatásokat vittünk véghez. Átírtuk a megoldómódszert, amihez további szubrutinokat kellett alkalmaznunk, bizonyosakat pedig kihagynunk.

3. A felhasznált numerikus módszerek rövid leírása

- **Az explicit Euler-módszer**

Az explicit Euler-módszer egy elsőrendű numerikus megoldómódszer közönséges differenciálegyenletekre. Tekintsük az

$$y'(t) = ay(t) + b(t) \quad \{14\}$$

lineáris inhomogén differenciálegyenletet, ahol $a \in \mathfrak{R}$, és b adott függvénye t -nek.

Jelölje az n -edik időréteget t_n , továbbá a megoldás n -edik időlépcsőhöz tartozó approximációját y_n ($y_n \approx y(t = t_n)$). Az időlépcső hossza $h = t_n - t_{n-1}$ az egyszerűség kedvéért állandó. Adott (t_n, y_n) rendezett párból y_{n+1} -et az explicit Euler-módszer segítségével úgy kapjuk meg, hogy a (t_n, y_n) ponton átmenő megoldásgörbe érintője mentén lépünk a (t_{n+1}, y_{n+1}) pontba:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = ay_n + b(t_n). \quad \{15\}$$

Ebből a keresett y_{n+1} -et kifejezve az

$$y_{n+1} = (1 + ha)y_n + hb(t_n) \quad \{16\}$$

képletet kapjuk. Ha elég kis lépésként haladunk, akkor várhatóan a pontos érték közelében kapjuk meg az eredményt.

A módszer természetes módon általánosítható

$$\vec{y}'(t) = \underline{\underline{A}}\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \quad \{17\}$$

alakú lineáris differenciálegyenlet-rendszerre is, ahol $\underline{\underline{A}}$ az együtthatómátrix, \vec{b} pedig időfüggő vektor. Ekkor az explicit-Euler módszer képlete

$$\underline{\underline{y}}_{n+1} = (\underline{\underline{I}} + h\underline{\underline{A}})\underline{\underline{y}}_n + h\underline{\underline{b}}(t_n), \quad \{18\}$$

ahol $\underline{\underline{I}}$ a megfelelő rendű identitásmátrix.

- **Az implicit Euler-módszer**

Az implicit Euler-módszer annyiban különbözik az explicitétől, hogy itt a (t_{n+1}, y_{n+1}) pontból haladunk az érintő mentén visszafelé a (t_n, y_n) pontba. Mivel az n -edik lépés elején az y_{n+1} még nem ismert, ez a módszer egy implicit egyenlet megoldásához vezet:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = ay_{n+1} + b(t_{n+1}), \quad \{19\}$$

azaz

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - ah}(y_n + hb(t_{n+1})). \quad \{20\}$$

Az implicit Euler-módszernek az az előnye az explicittel szemben, hogy stiff rendszerekre stabilabb, azaz nagyobb lépésköz esetén is jól alkalmazható. A módszert differenciálegyenlet-rendszerre is alkalmazhatjuk, ekkor a fenti képlet a következőképpen módosul:

$$\vec{y}_{n+1} = (\underline{I} - h\underline{A})^{-1}(\vec{y}_n + h\vec{b}(t_{n+1})). \quad \{21\}$$

Látható, hogy az egyenletrendszer megoldásához mátrixinvertálás szükséges, ezért ez a módszer az explicit Euler-módszernél több számítást igényel.

- **A θ -módszer**

A θ -módszer a két előbbi módszer egyesítésén alapul. Választunk egy $\theta \in [0,1]$ súlyparamétert, és az egyenletrendszer jobb oldalán $(1 - \theta)$ ill. θ szorzóval súlyozzuk az n -edik és az $n+1$ -edik időrétegbeli értéket:

$$\frac{\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n}{h} = (1 - \theta)(\underline{A}\vec{y}_n + \vec{b}(t_n)) + \theta(\underline{A}\vec{y}_{n+1} + \vec{b}(t_{n+1})). \quad \{22\}$$

Ezt átrendezve az

$$\vec{y}_{n+1} = (\underline{I} - h\theta\underline{A})^{-1}((\underline{I} + h(1 - \theta)\underline{A})\vec{y}_n + h(1 - \theta)\vec{b}(t_n) + h\theta\vec{b}(t_{n+1})) \quad \{23\}$$

formulához jutunk. Látható, hogy $\theta = 0$ esetén az explicit, $\theta = 1$ esetén pedig az implicit Euler-módszert kapjuk vissza. A θ -módszert $\theta = 0,5$ esetén középponti módszernek nevezzük. Belátható, hogy a középponti módszer másodrendű, és így pontosabban közelíti az megoldást, mint az explicit vagy az implicit Euler-módszer (Lambert, 1991).

- **A módszerek bemutatása egy konkrét példán**

A módszereket teszteltük egy két egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszerre:

$$\underline{\dot{y}}' = \underline{A}\underline{\bar{y}} + \underline{\bar{b}}, \quad \{24\}$$

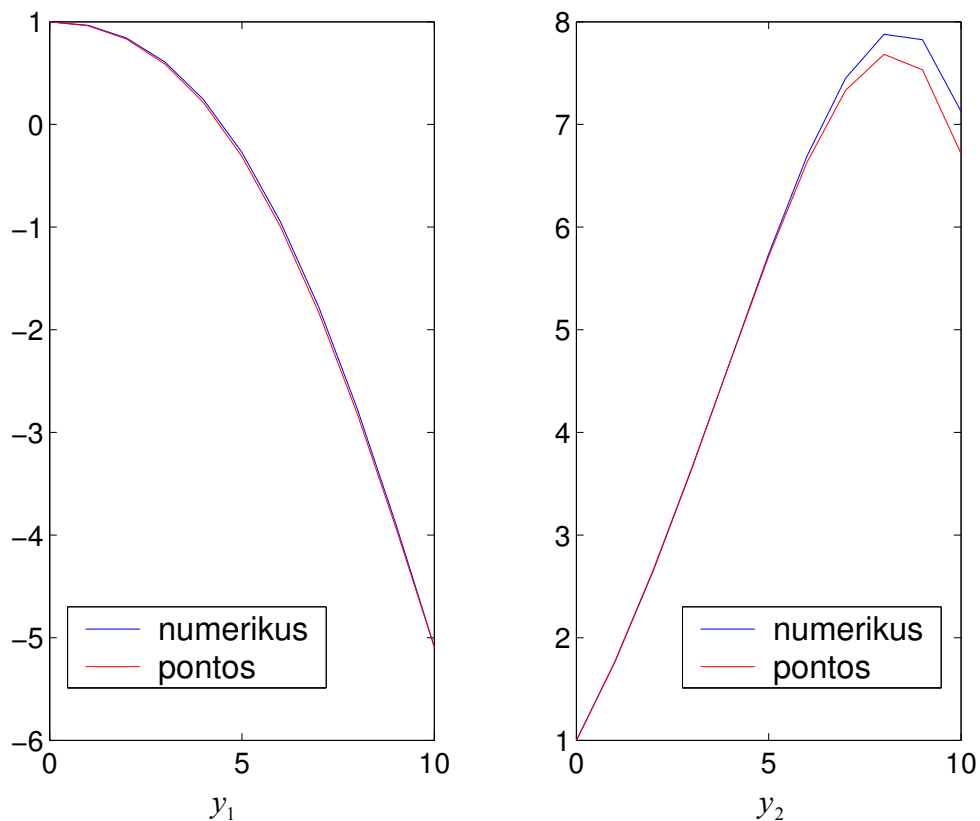
ahol

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,1 \\ 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\bar{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\bar{y}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Itt ismert a pontos megoldás, amelynek alakja:

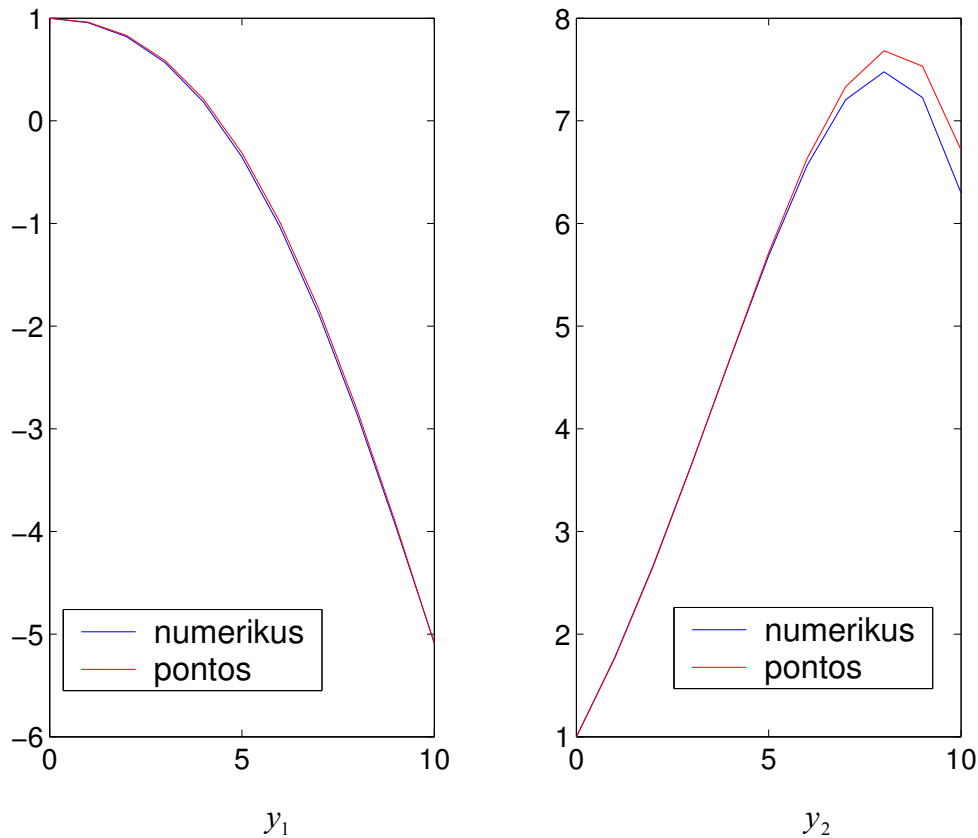
$$\underline{\bar{y}} = \exp(\underline{A}t)\underline{\bar{y}}_0. \quad \{25\}$$

Az explicit Euler-módszerrel kapott eredményeket a 3. ábrán mutatjuk be.



3. ábra. Az explicit Euler-módszerrel kapott numerikus megoldás és a pontos megoldás összehasonlítása a vizsgált tesztfeladatban.

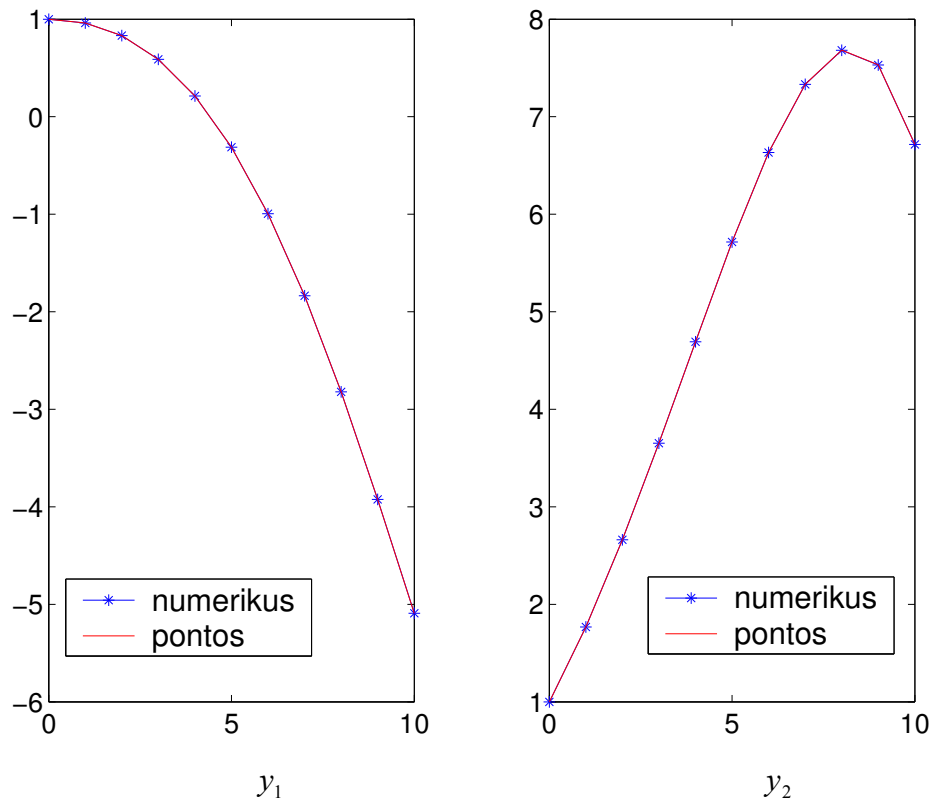
Az ábrákon látszik, hogy a numerikus megoldás végig a pontos megoldás felett halad. Az implicit Euler-módszernél ellenben a pontos megoldás alatt halad a numerikus megoldás (4. ábra).



4. ábra. Az implicit Euler-módszerrel kapott numerikus megoldás és a pontos megoldás összehasonlítása a vizsgált tesztfeladatban.

Erre a példára alkalmazva a középponti módszert, a közelítő megoldás a pontos megoldással együtt fut. Ahogy az 5. ábrán megfigyelhető, gyakorlatilag nem fedezhető fel hiba ennél a módszernél.

Látszik, hogy a középponti módszer súlyozva veszi figyelembe az explicit, illetve az implicit Euler-módszert, hiszen az egyik felülről, a másik pedig alulról közelíti a pontos megoldást. A középponti módszer görbéje így a kettő között, a pontos megoldás mentén halad. Ezzel magyarázható, hogy az ábrán nem látunk különbséget a numerikus és a pontos megoldás között.



5. ábra. A középponti módszerrel kapott numerikus megoldás és a pontos megoldás összehasonlítása a vizsgált tesztfeladatban.

4. Eredményeink

Mint azt már említettük, a programban a paramétereket tetszés szerint lehet variálni. Így az időlépcsőket is változtathatjuk, ezzel vizsgálva a három numerikus módszer rendjét, stabilitását és érzékenységét az időlépcső nagyságára.

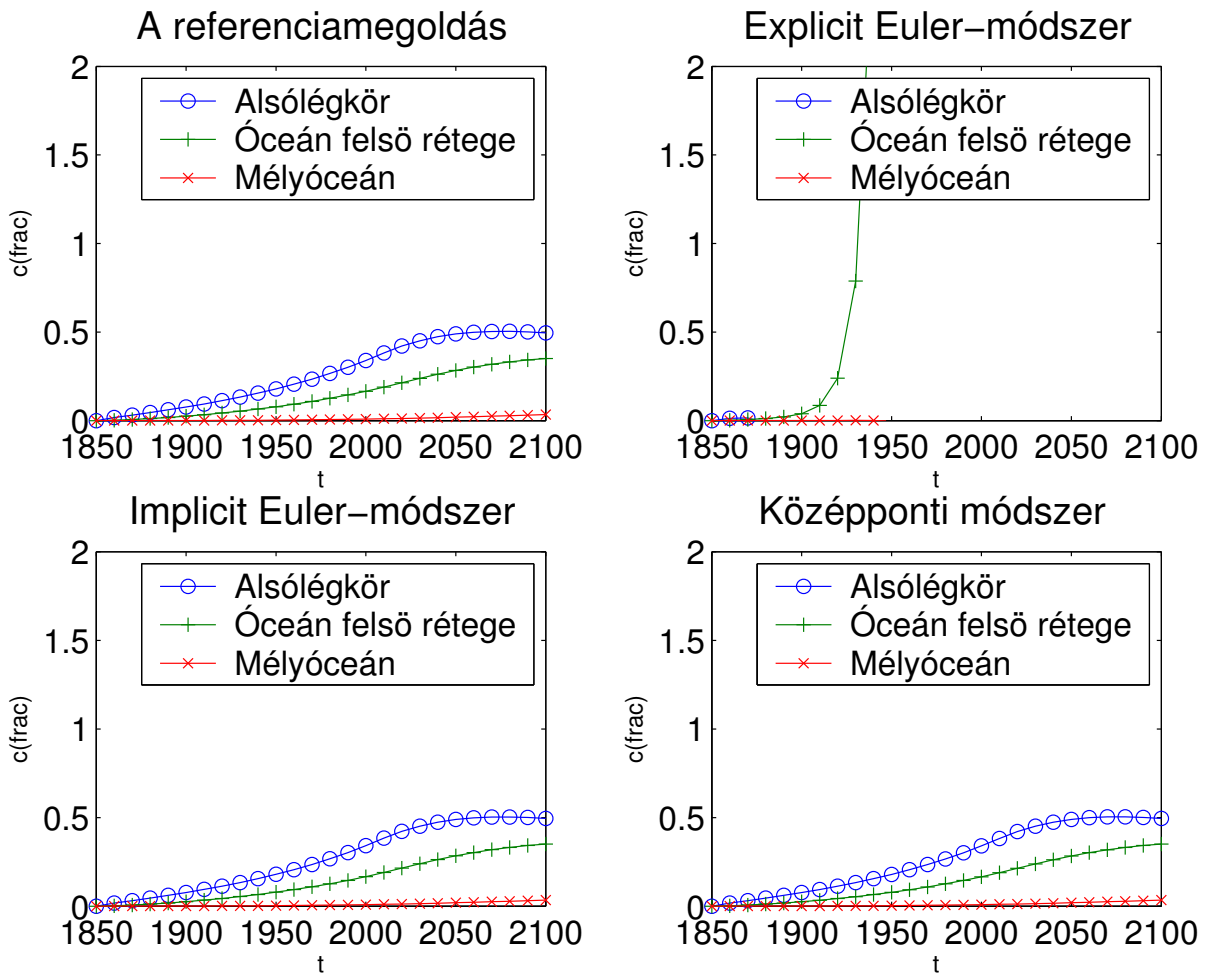
Elvárásainknak megfelelően, minél finomabb a felosztás, annál közelebb kerül a numerikus megoldás a pontos megoldás görbéjéhez. De ezt a három különböző módszerrel készített görbe nem egyformán teszi a lépésköz finomításának függvényében. A középponti módszer a legpontosabb, a sorban az implicit Euler-módszer követi, mely stabilabb numerikus módszer, mint az explicit Euler-módszer.

A modell az 1850-es évtől számol 2100-ig, és a kapott eredményeket tízévenként jeleníti meg. A továbbiakban n azt a paramétert jelöli, amely meghatározza, hogy a numerikus módszer hányat lépjen egy ilyen tíz éves időtartamon belül. Értelemszerűen, ha n -et növeljük, azaz az időlépcső hosszát csökkentjük, akkor egyre pontosabb megoldásokat kapunk.

Az általunk vizsgált differenciálegyenlet-rendszer stiff. A stiff rendszerekben az együtthatómátrix sajátértékei között több nagyságrendbeli különbség van, és az ilyen problémákra az explicit módszerek nem jól, illetve csak nagyon kis lépésköz esetén alkalmazhatók.

A továbbiakban megvizsgáljuk a három numerikus módszer és a referenciamegoldás viselkedését három tározóra vonatkozóan. Ezek az alsólégkör, az óceán felső rétege és a mélyóceáni réteg. Ezek a rétegek az átkeveredés során kapcsolatban állnak egymással; az alsólégkörből a CO_2 egy része átkerül az óceán felső rétegébe, majd onnan megint egy hányada a mélyóceánba. Így mindhárom tározó szén-dioxid-koncentrációi vizsgálhatók.

Vizsgálódásaink során lefutattuk a modellt $n = 10, 20, 40, 80$ és 160 esetén is. Mivel az egyenleteket pontosan nem tudjuk megoldani, az eredményeket egy nagy pontossággal előállított numerikus megoldással, az ún. referenciamegoldással vetettük össze. Ennek kiszámítására az ode15s programot használtuk, amely egy stiff rendszerek megoldására alkalmazható többlelépéses módszerrel oldja meg az egyenleteket. Az ode15 pontosságát 10^{-9} -enre állítottuk be. A 4. ábra a referenciamegoldást és az általunk használt három másik numerikus módszer eredményét mutatja $n = 10$ esetén.

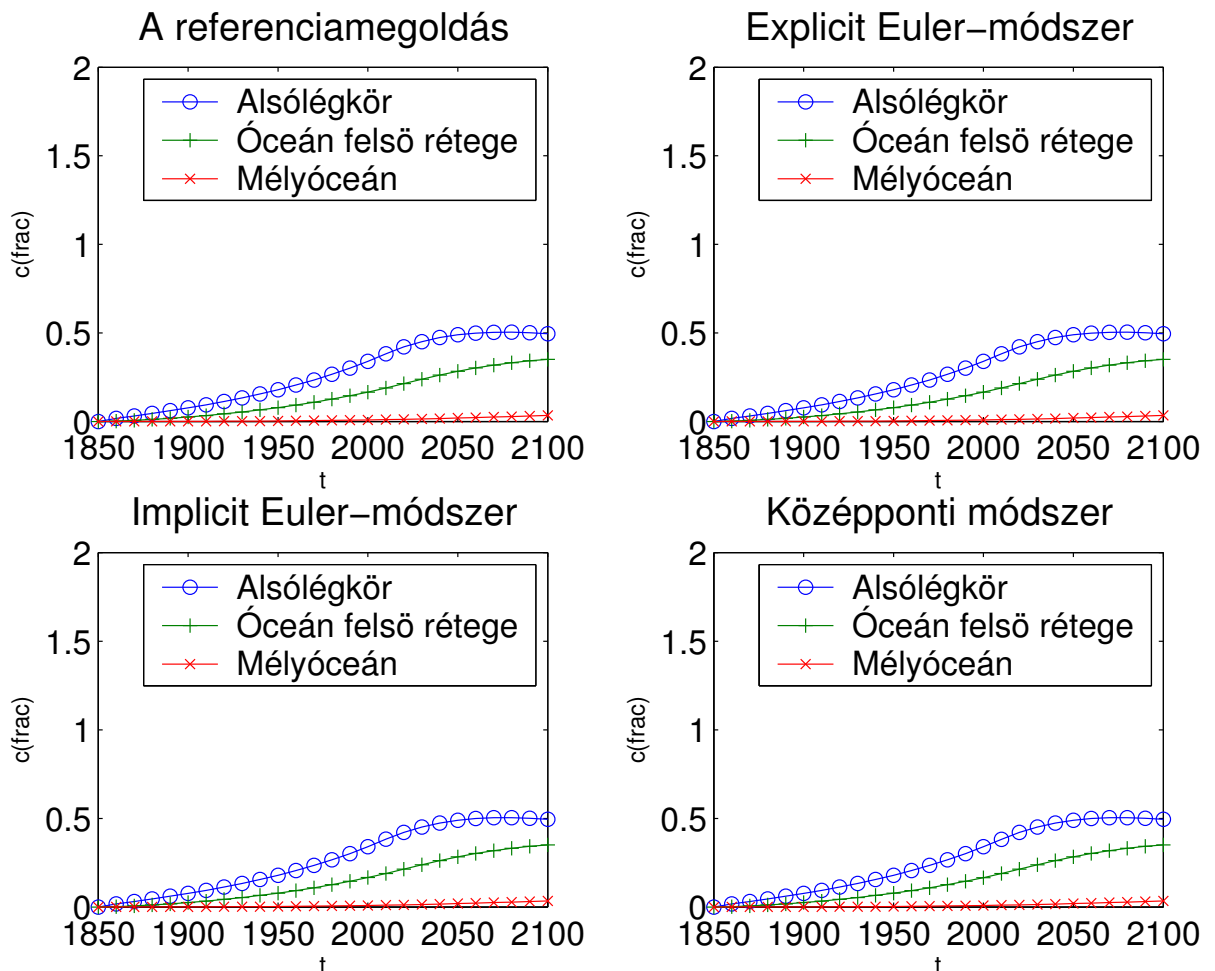


6. ábra. A különböző módszerekkel kapott numerikus megoldások összehasonlítása a referenciamegoldással három kiválasztott CO_2 -tározóra, $n = 10$ esetén.

Az ábrán szembevetendő a különbség az explicit Euler- és a többi módszer között. Míg a másik két általunk kipróbált numerikus módszer stabil, és a pontos megoldás mentén halad, addig az explicit Euler-módszer mindhárom tározó koncentrációértékeire kinő a végtelenbe. Ilyen nagy lépésköz esetén tehát ez a módszer instabil.

A következő esetben $n = 20$ -ra számítottuk ki a megoldásokat, és ekkor már az explicit Euler-módszer is megfelelően pontosnak bizonyult. Ez alátámasztja azt, hogy a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer stiff, de csak enyhén. Ezt abból is sejtettük, hogy az együtthatómátrix legkisebb és legnagyobb sajátértéke között ugyan négy nagyságrendnyi különbség van, de a sajátértékek viszonylag kis abszolút értékű számok.

A következő ábrán az $n = 160$ -as beállítás eredményei láthatók. Itt már mindegyik módszer megfelelően közelíti a referenciamegoldást, olyannyira, hogy az ábrán nem is látszik közöttük különbség.



7. ábra. A különböző módszerekkel kapott numerikus megoldások összehasonlítása a referenciamegoldással három kiválasztott CO_2 -tározóra, $n = 160$ esetén.

Megvizsgáltuk azt is, hogy az időlépcső hosszának csökkentésével hogyan változik a módszerek abszolút hibája az időintervallum végén. Az alsólégkör szén-dioxid-koncentrációinak abszolút hibája nagyságrendekkel eltér egymástól az általunk alkalmazott három numerikus módszer esetén. A legpontosabb a középponti módszer, a legkevésbé pontos pedig az explicit Euler-módszer. Ez az 1. táblázatból egyértelműen kitűnik.

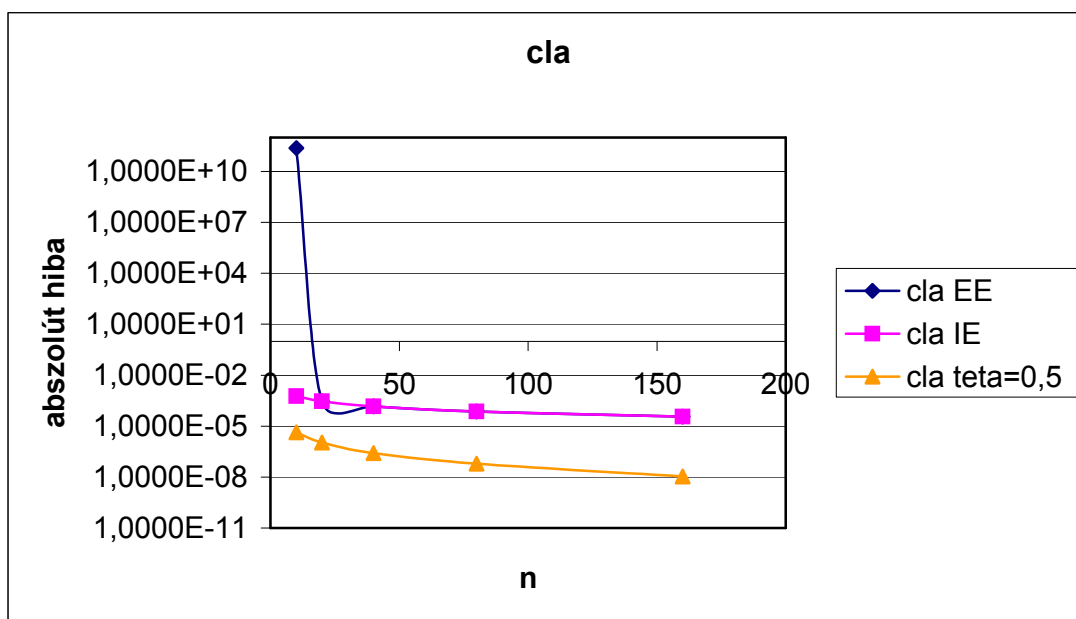
n	δC_{la} EE-módszer	δC_{la} IE-módszer	δC_{la} középponti-módszer
10	2,4011E+11	5,7584E-04	4,3005E-06
20	2,9109E-04	2,8898E-04	1,0707E-06
40	1,4528E-04	1,4476E-04	2,6323E-07
80	7,2570E-05	7,2449E-05	6,1369E-08
160	3,6265E-05	3,6244E-05	1,0905E-08

1. táblázat. Az általunk vizsgált módszerek abszolút hibái.

A táblázatban δC_{la} az alsólégkör koncentrációértékeinek hibáját jelöli az egyes esetekben.

Látható, hogy az időlépéseket csökkentve a hibák mindegyre csökkennek, ill. hogy a középponti módszer mindig legalább két nagyságrenddel pontosabb a másik két módszernél. Ugyanez igaz a vizsgált másik két réteg esetében kapott hibákra is.

Ábrázolva a fenti táblázat adatait szemléletesebben látszanak az eltérések (8. ábra).



8. ábra. Abszolút hibák az alsólégkörre. EE: explicit Euler-módszer, IE: implicit Euler-módszer, teta=0,5: középponti módszer.

Láthatjuk, hogy $n = 40$ -tól az explicit és az implicit Euler-módszer abszolút hibái együtt futnak.

Szembetűnő, hogy a középponti módszer abszolút hibája nemcsak jelentősebb mértékben csökken az időlépcső változtatásával, hanem értéke is két-három nagyságrenddel kisebb, mint a másik két módszer hibája.

Megnéztük mindhárom módszerre az egyes esetekben, hogy az időlépcső csökkentésével hogyan csökkenek az abszolút hibák. Ezzel vizsgáltuk a numerikus sémák konvergenciarendjét. Azt tapasztaltuk, hogy ha az időlépcsőt felére rövidítettük, akkor a hiba az explicit és az implicit Euler-módszernél is nagyjából a felére, a középponti módszernél pedig a negyedére csökkent. Ezt az alsó atmoszféra adataira be is mutatjuk a 2. táblázatban.

n	C_{1a} EE-módszer	C_{1a} IE-módszer	C_{1a} középponti-módszer
10			
20	0,0000	0,5018	0,2490
40	0,4991	0,5009	0,2458
80	0,4995	0,5005	0,2331
160	0,4997	0,5003	0,1777

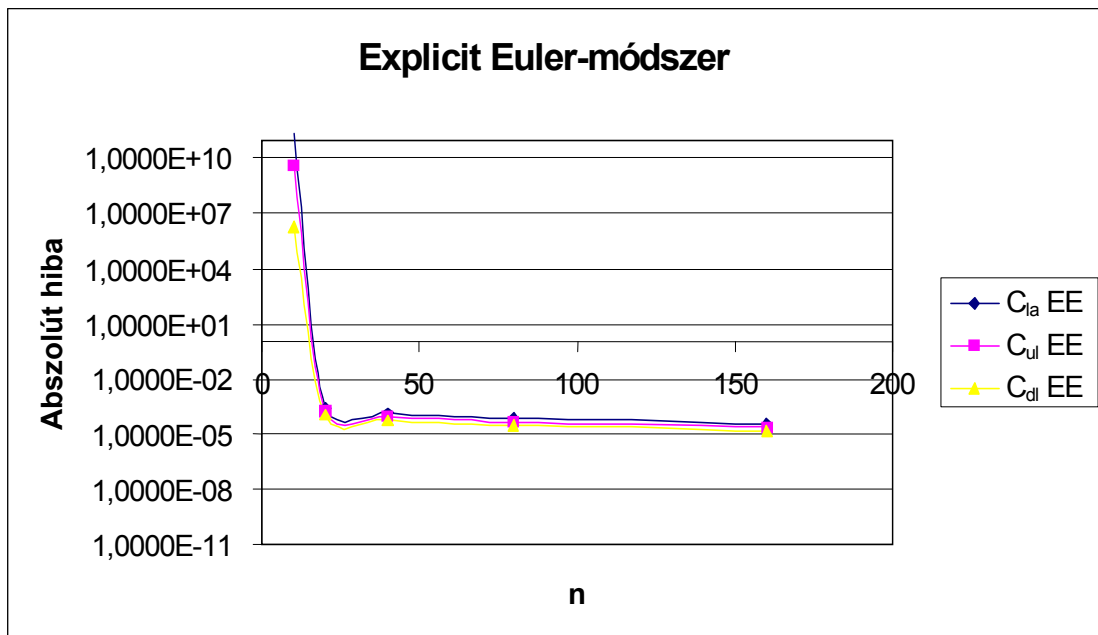
2. táblázat. Az abszolút hibák csökkenésének mértéke. A számok azt mutatják, hogy az abszolút hiba hányszorosára változott a kétszer hosszabb időlépcsővel kapott értékéhez képest.

Tehát erre a problémára az explicit és az implicit Euler-módszer elsőrendű, a középponti módszer pedig másodrendű módszerként viselkedik.

A modellt θ más értékeire lefuttatva azt tapasztaljuk, hogy a numerikus megoldás a $(0, 0.5)$ intervallumon az explicit, a $(0.5, 1)$ intervallumon pedig az implicit Euler-módszerrel kapott eredményhez áll közelebb a hibák tekintetében. Ez abból fakad, hogy a θ -módszer súlyozva veszi figyelembe az explicit és implicit Euler-módszert, így amelyiket nagyobb számmal súlyozzuk, az a módszer lesz domináns a numerikus megoldásban. Ebből látszik, hogy $\theta=0.5$ igen kicsiny környezetében még másodrendű, egyébként pedig elsőrendű módszereket kapunk mind a két irányban a 0.5 értéktől távolodva.

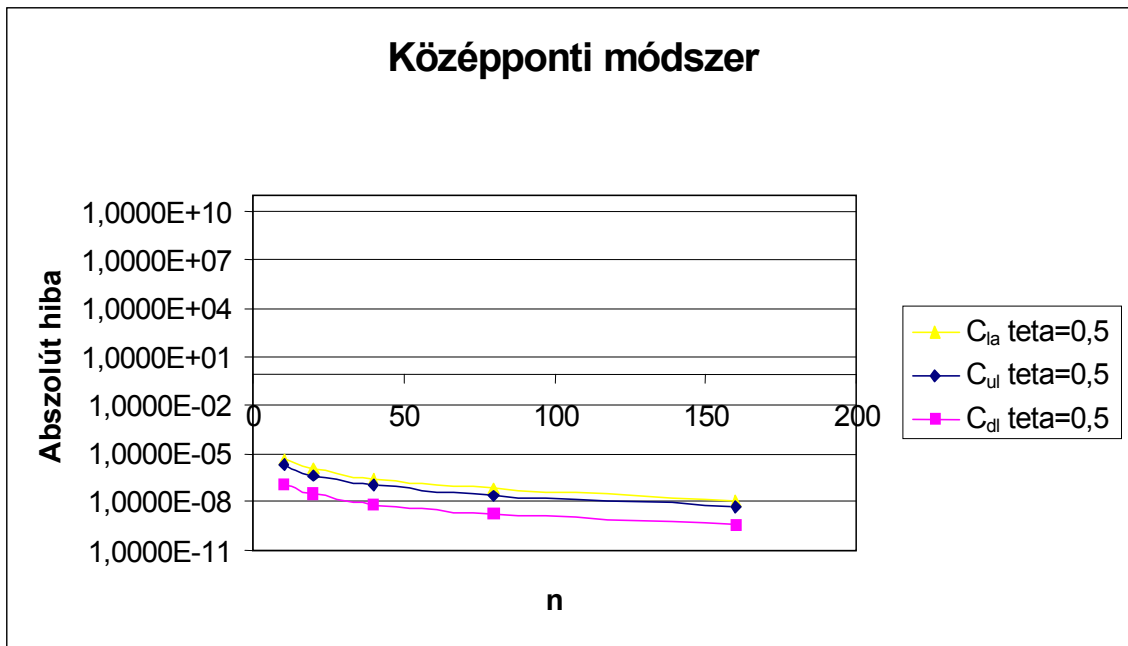
Ezen tulajdonságok alapján elmondhatjuk, hogy a probléma megoldására a három általunk vizsgált módszer közül legjobban a középponti módszer, a legkevésbé pedig az explicit Euler-módszer alkalmazható.

Eddig csak az alsóléggörre számított abszolút hibákkal foglalkoztunk, de összehasonlításképpen nézzük meg az explicit Euler- és a középponti módszer viselkedését három kiválasztott rétegre, nevezetesen az alsóléggörre, a felső óceáni rétegre és a mélyóceánra. A kapott megoldásokat az időlépcső függvényében a 9. ábra mutatja be.



9. ábra. Az explicit Euler-módszer hibája az időlépcső függvényében három kiválasztott tározóra.

Az explicit Euler-módszer hibái az alsóléggör, a felső óceáni réteg és a mélyóceán koncentrációit nézve szinte teljesen együtt futnak, nincs számottevő eltérés köztük. Tehát az explicit Euler-módszer nagyságrendileg ugyanolyan hibával dolgozik az egyes időlépcsők esetén mindhárom rétegre vonatkozóan.



10. ábra. A középponti módszer hibája az időlépcső függvényében három kiválasztott tározóra.

A középponti módszer hibáinak összehasonlításánál viszont szembeűnő, hogy a mélyóceáni réteg hibája 2-5 nagyságrenddel a másik két tározóra számított hibák alatt található. Ennek két oka lehet:

- a mélyóceáni rétegben eleve kisebb koncentrációértékek vannak,
- az erre a tározóra felírt differenciálegyenlet egyszerűbb, egyetlen tagból áll, míg a másik két rétegre felírt egyenlet több taggal írható fel.

Az eddig bemutatott eredményeket egy adott emissziós függvénnyel kaptuk. Mint már említettük, a programban számos bemenő adatot meg lehet változtatni, így a számítás végét és az antropogén szén-dioxid-emisszió mértékét is.

Az eddig bemutatott adatokat a legoptimistább emissziós függvény alkalmazásával kaptuk. Ez feltételezi, hogy az antropogén emisszió növekedésének mértéke 2010-től kezdve csökken, 2100-ra eléri a 0-t, tehát 2100-tól konstans kibocsátással számol. Az antropogén forrástagot a

$$Q_c(t) = c_1 \exp(r_1 t) \tag{26}$$

függvény írja le a modellben. A c_1 konstans 2007-es értéke $4,4 \cdot 10^{-3}$, az r_1 szorzó pedig két tagból áll. Az első tag

$$r_1 b = 0,01 . \tag{27}$$

A másik tag, $r1c$, változtatható a programban, és csak 2010-től ad nemnulla járulékot $r1b$ értékéhez. 2010-ig mind a négy emissziós függvény együtt fut. Két esetben növekszik az antropogén kibocsátás, egy esetben stagnál, és a legoptimistább verzió szerint 2010-től csökken a kibocsátás mértéke. Az egyes esetekre:

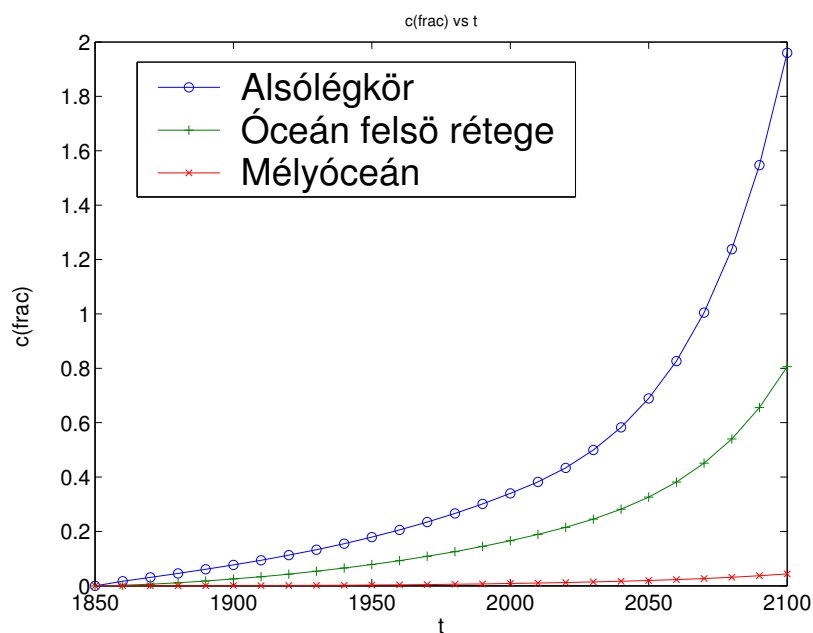
- $r1c = 0,0050$ (1)
- $r1c = 0,0025$ (2)
- $r1c = 0,0000$ (3)
- $r1c = -0,010$ (4).

Az r_1 értékét 2010 és 2100 között lineáris interpolációval kapjuk meg:

$$r_1(t) = r1b + r1c * (t - 2010) / (2100 - 2010). \quad \{28\}$$

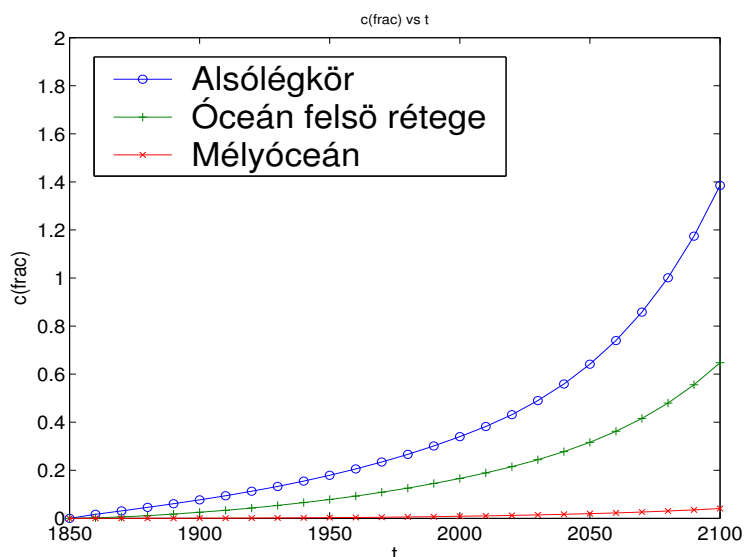
Az így kapott r_1 és c_1 együttthatók kerülnek az emissziós függvénybe.

A modell megbízhatóságának és stabilitásának tesztelésére tehát négy különböző szén-dioxid-szenáriót futtatunk le. Mind a négy esetben $r_1 = 0,01$ volt a 2010-es évig, majd az első esetben (1) az r_1 értékét 2010-től lineárisan megnöveltük 0.0050-del, tehát 2100-ban $r_1 = 0,015$ lett. Ez azt jelenti, hogy a szén-dioxid-kibocsátás mértéke 50%-kal nő majd a 21. század végére, és ennek eredményeként az alsólégkörben a szén-dioxid-koncentráció 828,7 ppm lenne (11. ábra).



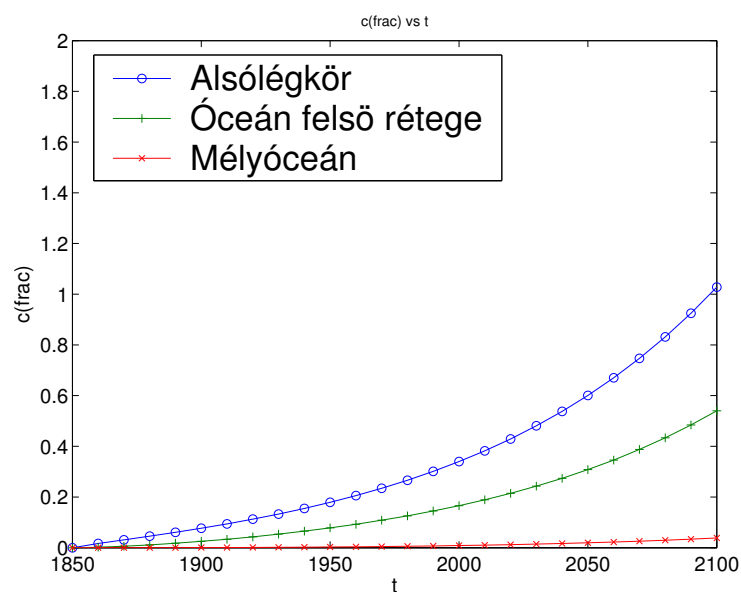
11. ábra. A szén-dioxid-koncentrációk előrejelzése az (1) emissziós szenárióra.

A második esetben (2) már csak 25%-os növekedéssel számolunk a szén-dioxid-kibocsátásban, azaz 2010-től 2100-ig r_1 0,01-ről 0,0125-re nő. Ekkor az alsó légkörben a szén-dioxid-koncentrációja 2100-ben 667,8 ppm lenne (12. ábra).



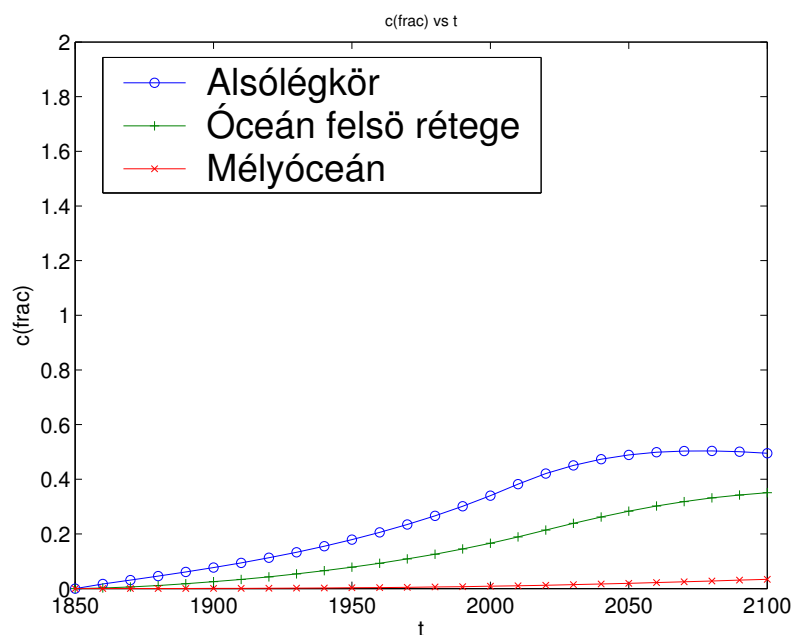
12. ábra. A szén-dioxid-koncentrációk előrejelzése a (2) emissziós scenárióra.

A harmadik forgatókönyvben (3) az r_1 értéke 2010 után sem változik. Ez azt jelenti, hogy a szén-dioxid-kibocsátás mértéke ugyanolyan ütemben folytatódik, mint 1850 és 2010 között. Ekkor 567,9 ppm-es szén-dioxid-koncentrációra számíthatunk 2100-ban (13. ábra).



13. ábra. A szén-dioxid-koncentrációk előrejelzése a (3) emissziós scenárióra.

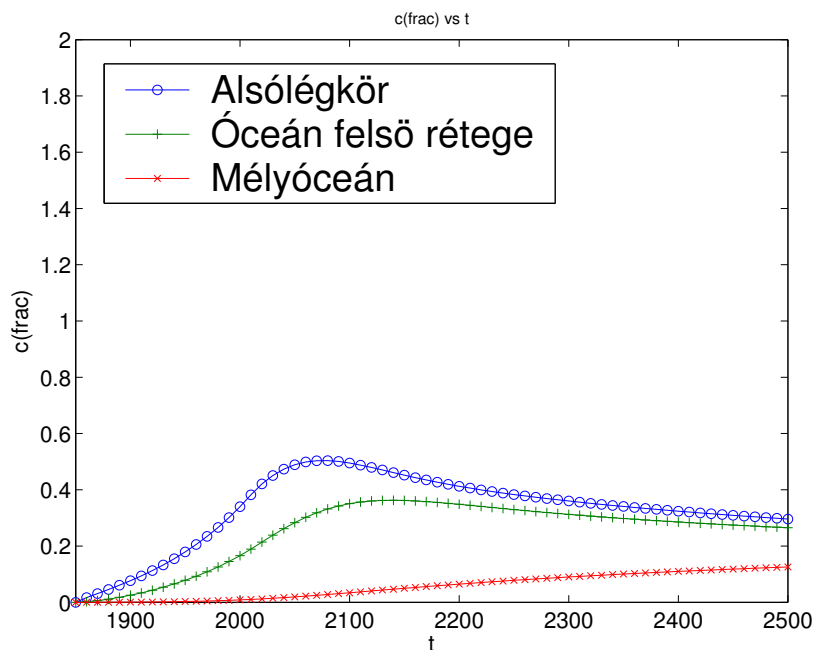
A legoptimistább scenárióban (4) azzal számolunk, hogy a fosszilis tüzelőanyagokkal termelt energiát globálisan helyettesíteni tudják majd más energiaforrásokkal, így a szén-dioxid-kibocsátás mértéke, azaz jelen esetben az r_I paraméter értéke 2010 után 2100-ra lineárisan lecsökken nullára. Ekkor $Q_c(2100) = c_1 \exp(0) = c_1$ és $c_{la} = 418,6$ ppm (14. ábra).



14. ábra. A szén-dioxid-koncentrációk előrejelzése az (4) emissziós scenárióra.

Itt már jól látszik a kibocsátás-csökkentés eredménye, ugyanis 2010 után az alsólégkörben megállt a szén-dioxid-koncentráció növekedése.

Az első három esetben eltérő mértékű exponenciális növekedés figyelhető meg mindhárom tározó esetén. Jól látható, hogy ahogy csökken a változó paraméter értéke, úgy a függvényértékek is csökkennek az egyes ábrákon mindhárom tározóra. Ha csökkenő emissziót feltételezünk, akkor láthatjuk, hogy 2100-ra az alsólégkör szén-dioxid-koncentrációi csökkenni kezdenek. Itt azonban azt is érdemes megjegyezni, hogy a másik két tározó koncentrációértékei tovább növekednek, jelezve az egész rendszer tehetetlenségét. Különösképpen az óceán felső rétegében nő a szén-dioxid-koncentráció, ami jól mutatja, hogy a CO_2 lassan, de folyamatosan keveredik át más tározókba. Ezt a folyamatot még jobban szemlélteti a 15. ábra, amelyen az előbbi, azaz a negyedik szén-dioxid-scenárióra adott eredmények láthatók 1850-től 2500-ig.



15. ábra. A szén-dioxid-koncentrációk előrejelzése a 2500-as évig a (4) emissziós scenárióra.

Az értékek az alsólégkört és az óceán felső rétegét tekintve csökkennek körülbelül 2080-tól, de a mélyóceáni réteg koncentrációértékei tovább emelkednek, jelezvén számunkra, hogy milyen visszafordíthatatlan következményekkel járó folyamatot idéztünk elő. Még abban az esetben is beláthatatlanok a következmények, amikor 2010-től jelentősen mérsékeljük az általunk kibocsátott szén-dioxid mennyiségét. Érdekes viszont a mélyóceáni réteg szén-dioxid-koncentrációjának alakulása, amely folyamatosan emelkedik. A légkörbe bejuttatott antropogén szén-dioxidot tehát végül az óceán veszi fel. A mélyóceán egy óriási tározó, a felső óceáni rétegből csak lassan, mintegy ezer év alatt keveredik be ide a CO₂.

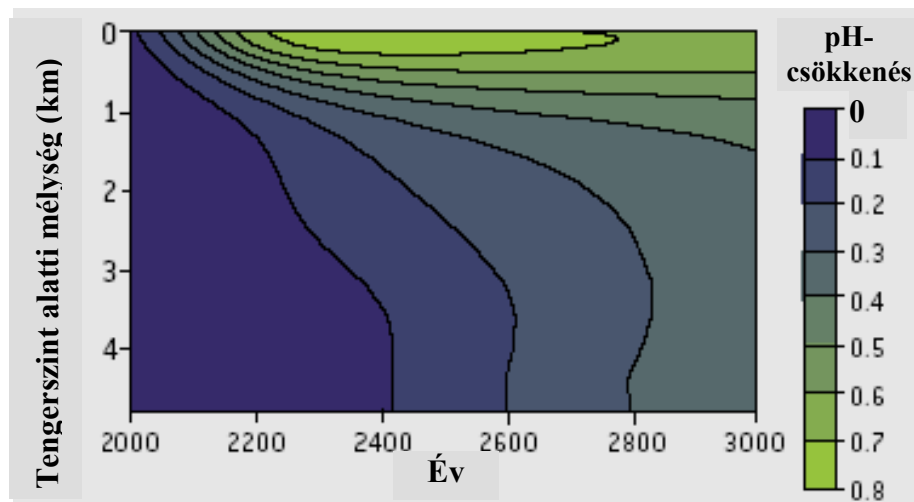
Az óceánban lévő CO₂ mennyisége, mint azt már korábban említettük, hatással van az óceán pH-jára.

4.1. Az óceán savasodása

Mint azt már említettük, az óceán savasodása veszélyezteti a benne élő meszes vázat kiválasztó élőlényeket.

Az óceánba kerülő CO₂ fő forrása a fosszilis tüzelőanyagok égetése során keletkezik. Ezt onnan tudjuk megállapítani, hogy a szénhidrogének alig, vagy egyáltalán nem tartalmazzák az élő szervezetekben előforduló, radioaktív szén 14-es izotópot, mely az átlagosnál 2-vel több neutronot tartalmaz. Így a fosszilis tüzelőanyagok égetése egy izotópokban kimutatható nyomot hagy. A kibocsátott CO₂ majdnem fele az óceánba kerül, ott szénsavat, majd karbonát- és hidrogén-ionokat képezve. Ezzel minden egyes CO₂ molekula, mely az óceánba kerül, két hidrogén-ionnal gyarapítja az óceán amúgy természetesen lúgos környezetét.

Ha az óceán pH-ja 0.1-del csökken, az azt jelenti, hogy a hidrogénion koncentrációja megtízszereződik. A semleges 7-es pH helyett az óceán pH-ja 8-8.3 értékű. A CO₂ abszorpciója már 0.1-del csökkentette a felszíni vizek pH-ját, és ha nem változik a kibocsátási trend, akkor az évszázad végére további 0.3-del csökkenni fog (Doney, 2006), és néhány évszázad múlva alacsonyabb lesz, mint az elmúlt 300 millió évben valaha volt.

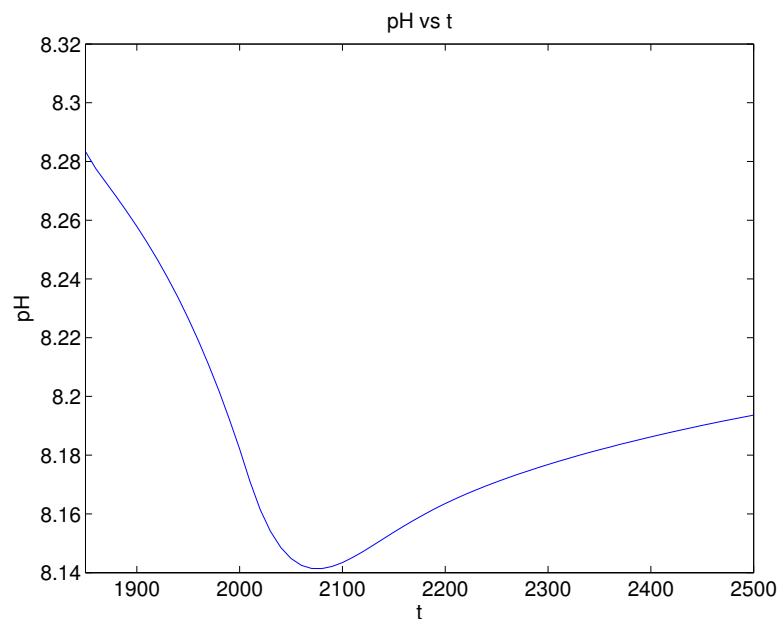


16. ábra. Az óceán savasodásának várható mértéke a következő 1000 évben, a mélység függvényében. Forrás: Doney, 2006.

Ez veszélyt jelent a korallokra is, melyek az óceánok sekélyebb vizeiben élnek, és az óceánok legproduktívabb, legösszetettebb ökoszisztémái. Így végső soron a veszély

nem csak a kagylókat, korallokat és az egyéb mészvázú élőlényeket fenyegeti, hanem egy egész biológiai társulásban okoz komoly változásokat. És ezt olyan gyors ütemben teszi, hogy a fajoknak nem lesz esélyük alkalmazkodni a megváltozott körülményekhez, így bizonyos fajok eltűnhetnek a Föld színéről.

A mi modellfuttatásunk során is látszik ez a csökkenő trend az óceán pH-értékében. Ezt láthatjuk a következő ábrán, 650 éves periódusra ábrázolva.



17. ábra. Az óceánvíz pH-értékének előrejelzése a 2500-as évig a (4) emissziós szcenárióra.

Ez az eredmény sem megnyugtató (17. ábra). Az óceán pH-ja a sok felvett CO₂ miatt csökken, a minimumot 2070 és 2080 között éri el, ekkor a pH = 8,1414. Ezután, azaz gyakorlatilag miután az óceán felső rétegében a CO₂-koncentráció csökkenni kezd, a pH elkezd emelkedni, és 2500-ban eléri az 1990-es szintet (pH = 8,1923). Ez azért érdekes, mert 2500-ban az óceánokban jóval több oldott CO₂ lesz, mint amennyi 1990-ben volt bennük, a pH mégis megegyezik mindkét esetben. Ebből arra következtethetünk, hogy olyan visszacsatolási mechanizmusok zajlanak le az óceánban, amik a pH emelkedésével járnak. Itt azonban érdemes megemlítenünk, hogy a modellünk nagymértékben egyszerűsített, így számos folyamatot figyelmen kívül hagy. Az azonban ettől függetlenül biztos, hogy el fognak indulni visszacsatolási

mechanizmusok, melyek egy új egyensúly beállítására törekednek, azonban ezek lehetnek másfajta mértékűek, mint amit a mi eredményünk mutat.

Itt ismét ki kell hangsúlyozni, hogy ez a legoptimistább közelítés, és még ebben az esetben is akkora kárt okozunk a környezetünkben, amelynek a helyrehozásához nem elég egy évezred. Valószínűsíthetjük továbbá, hogy nem ez a forgatókönyv írja majd le a jövőnk szén-dioxid-koncentrációjának alakulását. Ugyanis ehhez el kéne érnie az emberiségnek, hogy a jövő évtől csökkentse a CO₂ kibocsátása növekedésének mértékét. Ez sajnos a jelen állás szerint teljesen kizárt.

5. Összefoglalás

Munkánkban egy angol-amerikai együttműködésben készült egyszerűsített globális szén-dioxid-modellt tanulmányoztunk. A meglévő Matlab-programot átírtuk, más numerikus módszereket alkalmaztunk benne. Megvizsgáltuk, hogy a módszerek hogyan viselkednek különböző hosszúságú időlépcsőkre, és mennyire alkalmazhatók a szóban forgó modellfeladatra.

Megnéztük a módszerek hibáit, illetve megvizsgáltuk, hogy más paraméterértékekre a megoldás hibája hogyan változik.

Arra a következtetésre jutottunk, hogy az általunk vizsgált jelenség leírására a középponti módszer a legmegfelelőbb. Mivel az egyenletek stiff rendszert alkotnak, az explicit Euler-módszer csak kellően rövid lépésközzel használható: túlságosan nagy lépésköz választása esetén a megoldás rövid időn belül kinő a végtelenbe. A stiffness enyhességét mutatja azonban, hogy a lépésközt az explicit módszernél sem kellett a végtelenségig finomítani, elég volt félévente egyet lépni, hogy kellően pontos eredményt kapjunk. Ez azért volt lehetséges, mert az együtthatómátrixunk sajátértékei kis abszolút értékű számok.

Mindezek mellett tanulmányoztuk a modellbe beépített négy különböző emissziós függvény szerkezetét és viselkedését az idő előrehaladtával. Továbbá a modell paramétereinek megváltoztatásával megvizsgáltuk a rendszer tehetetlenségét. Láthattuk, hogy habár a legoptimistább esetben az alsólégkörben néhány évszázad elteltével már csökkenni kezd a szén-dioxid-koncentráció, a mélyóceánban az átkeveredés időigényessége miatt folyamatos a növekedés. Bemutattam, hogy ez miért befolyásolja az óceán pH-ját, és ez a pH csökkenés milyen hatással van az élővilágra. A mélyóceán tehetetlensége miatt a pH csökkenés akkor is folytatódik, amikor esetlegesen a szén-dioxid-koncentráció már nem emelkedik tovább.

Sajnos be kell látnunk, hogy a nagy mennyiségű CO₂ légkörbe juttatásával olyan folyamatot idézünk elő, amelynek hatásait évszázadokig érezni fogjuk. Ha most azonnal felhagyna az emberiség a gáz kibocsátásával, akkor is évezredekre lenne szükség az eredeti állapot visszanyeréséhez.

6. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani legfőképpen témavezetőmnek, dr. Havasi Ágnesnek a rengeteg segítségért és alapos munkájáért, és dr. Faragó Istvánnak a tanácsokért, javaslatokért. Továbbá szeretném megköszönni Kelemen Fanninak az együttműködést a TDK dolgozat megírásában, mely egész dolgozatom alapjául szolgált.

7. Irodalomjegyzék

R. Bacastow, and C. D. Keeling, Atmospheric Carbon Dioxide and Radiocarbon in the Natural Carbon Cycle: Changes from A.D. 1700 to 2070 as Deduced from a Geochemical Model, in *Carbon in the Atmosphere* (G. W. Woodwell and E. V. Pecan, eds.), Proceedings of the 24th Brookhaven Symposium in Biology, Upton, NY, May 16-18, 1972; published by the Technical Information Center, Office of Information Services, United State Atomic Energy Commission.

Brajnovits, B., és Kelemen, F., Egy egyszerűsített globális szén-dioxid-modell numerikus vizsgálata, Tudományos Diákköri Dolgozat (témavezető: Havasi Ágnes), 2009.

G.W. Griffiths, A.J. McHugh, W.E. Schiesser, An Introductory Global CO₂ Model, Internal report, City University, London, UK, Lehigh University, USA, University of Pennsylvania, 2008.

J.C.G. Walker, Numerical Adventures with Geochemical Cycles, Oxford University Press, 1991.

O. Hoegh-Guldberg, Coral Reefs under Climate Change and Ocean Acidification, *Science*, vol. 319, 28 MAECH, 2008, p1729.

K. Caldeira, M.E. Wickett, Anthropogenic Carbon and Ocean pH, *Nature*, vol. 425, September 25, 2003, p 365.

M.D. Iglesias-Rodriguez, P.R. Halloran, R.E.M. Rickaby, I.R. Hall, E. ColmeneroHidalgo, J.R. Gittins, D.R.H. Green, T. Tyrrell, S.J. Gibbs, P. von Dassow, E. Rehm, E.V. Armbrust, K.P. Boessenkool, Phytoplankton Calcification in High-CO₂ World, *Science*, vol. 320, 18 APRIL 2008, pp 336-340.

S.C. Doney, The Dangers of Ocean Acidification, *Scientific American*, pp. 58-65, 2006.

J. D. Lambert, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Wiley, New York 1991.

IPCC, Fourth Assessment (winner of Nobel prize), Working Group I Report, The Physical Science Basis, Chapter 10, Global Climate Projections, available at <http://www.ipcc.ch/ipccreports/ar4-wg1.htm> (CD file IPCC 4th chap10.pdf)