

Alkalmazott analízis

6. gyakorlat

Az 5. órán két módszert is tanultunk az interpolációs polinom felírására: a Lagrange-féle és a Newton-féle módszert. Most nézzünk meg egy harmadik lehetőséget!

A határozatlan együtthatók módszere

Láttuk, hogy az interpolációs polinom fokszámát az alappontok száma határozza meg: n db alappont esetén $n - 1$ -ed fokú polinomot keresünk. Ezért megtehetjük azt is, hogy felírjuk a megfelelő fokszámú polinomot határozatlan együtthatókkal, behelyettesítjük mindegyik x_i alappontot, és az így kapott kifejezést egyenlővé tesszük a megadott f_i értékkel ($i = 1, 2, \dots, n$). Így éppen annyi egyenletet kapunk az ismeretlen együtthatókra, amennyi azok száma.

Pl. szeretnénk interpolációs polinomot illeszteni a $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$ értékpárokkra, tehát $x_1 = -1$, $f_1 = 1$, $x_2 = 0$, $f_2 = -1$, $x_3 = 1$, $f_3 = -1$. Három db alappont van, így a keresett polinom $p_3 \in P_2$, azaz legfeljebb másodfokú. Alakja tehát

$$p_3(x) = ax^2 + bx + c,$$

ahol az egyelőre még határozatlan a , b és c együtthatók értékét úgy kell megválasztanunk, hogy a p_3 polinom átmenjen a megadott pontokon. Ezért behelyettesítjük x helyébe az x_i , $i = 1, 2, 3$ értékeket. Mindegyik esetben a , b és c lineáris kombinációját nyerjük, amelyet egyenlővé teszünk a megfelelő f_i értékkel. Ezzel a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1$$

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -1$$

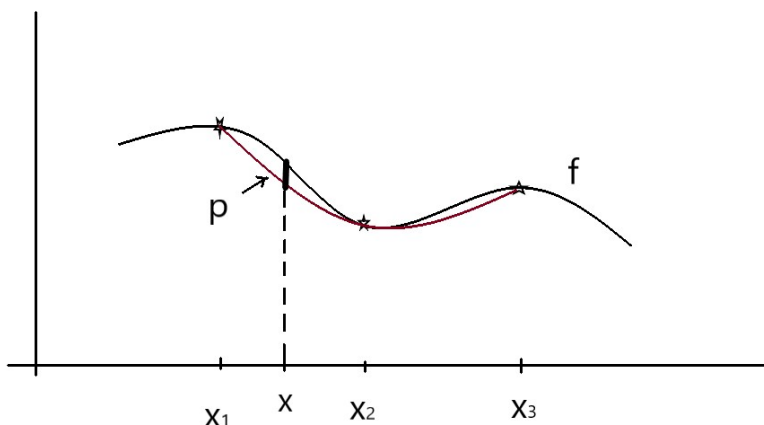
$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -1$$

A kapott egyenletrendszer minden esetben egy négyzetes mátrixú lineáris algebrai egyenletrendszer lesz az ismeretlen együtthatókra. Most ennek megoldása elemi úton is elvégezhető: $a = 1$, $b = -1$ és $c = -1$. Vagyis a keresett interpolációs polinom: $p_3(x) = x^2 - x - 1$.

Folytonos függvény közelítése interpolációs polinommal

Az interpolációs feladat ismertetésénél feltettük, hogy egy függvényről csak diszkrét pontokban, az x_i alappontokban van információnk. (Pl. a gyakorlatban ez a helyzet, ha egy fizikai mennyiséget csak diszkrét időpontokban, pl. óránként mérnek.) Az interpolációs polinom alkalmazása azonban olyankor is szóba jöhet, amikor egy folytonos f függvény

van megadva valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, de valamilyen okból szeretnénk polinommal helyettesíteni. (Pl. azért, mert polinommal egyszerűbben tudunk számolni.) Ekkor a következő ötletünk lehet: vegyünk fel az I intervallumban $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokat, ezekben a pontokban legyenek f értékei rendre $f_1, f_2, \dots, f_n$, és illesszünk interpolációs polinomot az (x_i, f_i) értékpárookra. Ez a $p_n \in P_{n-1}$ interpolációs polinom az alappontokban ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint f , kérdés már csak az, hogy két alappont között, ill. a szélső alappontokon kívül mennyire jól közelíti f -et, azaz mit mondhatunk $f(x)$ és $p(x)$ eltéréséről a többi $x \in I$ pontban. A következő állításra támaszkodhatunk.



0.1 Tétel. Tegyük fel, hogy $f \in C^n(I)$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, $x \in I$. Ekkor az x és az $x_1, x_2, \dots, x_n$ alappontok által meghatározott legszűkebb intervallumban van olyan ξ pont, amelyre

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{n!} \omega_n(x) f^{(n)}(\xi),$$

ahol $\omega_n(x) := (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, az ún. alappontpolinom.

Van tehát (legalább egy) olyan ξ pont, amelyet ha behelyettesítünk az f függvény n -edik deriváltjába, és kiszámítanánk a fenti egyenlőségben a jobb oldalon szereplő szorzatot, akkor pontosan megkapnánk a hibát a kiválasztott x pontban. Ezt a ξ pontot azonban többnyire nem ismerjük, ezért a jobb oldalt nem tudjuk kiszámítani. Mégis hasznos ez a tétel, hiszen világos, hogy ha az f függvény n -edik deriváltjára (abszolút értékben) az egész I intervallumra tudunk valamilyen módon felső korlátot találni, azaz meg tudunk határozni úgy egy M_n számot, hogy

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n$$

teljesüljön minden $x \in I$ pontban, akkor az

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_n}{n!} |\omega_n(x)| \quad \forall x \in I$$

becslés is biztosan fennáll az elkövethető hiba nagyságára.

Gondoljuk végig, hogy mit ad ez a hibabecslő formula arra a speciális esetre, amikor $n = 2$, azaz csak két alappont van. Az interpolációnak ezt az esetét lineáris interpolációnak nevezzük. Ekkor az f függvény grafikonján az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokat egyenessel összekötve kapjuk a p_2 interpolációs polinomot. Helyezkedjen el most azon x pont, amelyben $f(x)$ és $p_2(x)$ távolsága érdekel bennünket, az x_1 és az x_2 között. A tétel alapján ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{M_2}{2!} |\omega_2(x)| = \frac{M_2}{2!} |(x - x_1)(x - x_2)|$$

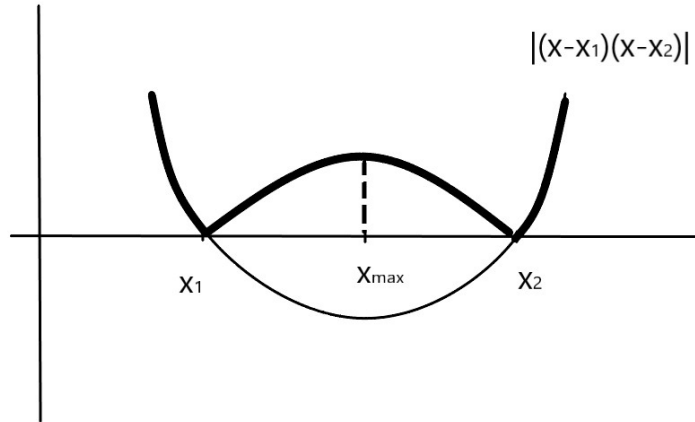
Itt M_2 olyan szám, amelyre teljesül, hogy

$$|f''(x)| \leq M_2 \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$

Vegyük észre, hogy az $|(x - x_1)(x - x_2)|$ kifejezésre is tudunk adni felső korlátot általánosan, ha x a két alappont között van, ahogy azt feltettük. Akár az

$$|(x - x_1)(x - x_2)| \leq |x_1 - x_2| \cdot |x_1 - x_2| = (x_2 - x_1)^2$$

becslés is jó, de ennél kisebb felső korlátot is adhatunk, ha figyelembe vesszük, hogy az $x \mapsto (x - x_1)(x - x_2)$ függvény egy felfelé álló parabola x_1 és x_2 zérushelyekkel. Abszolút értékben véve ezt a másodfokú függvényt, az x_1 és x_2 pontok között lefelé álló parabolát kapunk, amelynek maximuma éppen az x_1 és x_2 pont között félúton, vagyis az $x_{\max} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ pontban van.



Ezért

$$|(x - x_1)(x - x_2)| \leq \left| \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 \right) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2 \right) \right| = \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}.$$

Ezt felhasználva az

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{M_2}{8}(x_2 - x_1)^2$$

becsléshez jutunk.

Pl. 1) Mekkora lépésközzel készítsük el a szinusz függvény függvénytáblázatát, hogy két szomszédos alappont között lineárisan interpolálva a hiba ne legyen nagyobb, mint 10^{-4} ?

Megoldás: Az $f(x) = \sin x$ függvény második deriváltja $f''(x) = -\sin x$, így $|f''(x)| \leq 1$ minden x -re. Így ha két szomszédos alappont távolsága h , akkor bármely x pontban fennáll az

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{h^2}{8} \cdot 1$$

becslés. Ezért ha $\frac{h^2}{8} < 10^{-4}$, azaz $h < \sqrt{8} \cdot 10^{-2}$, akkor megfelelő lesz a függvénytáblázat.

Pl. 2) Közelítsük az

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2},$$

függvényt az $I = [0, 1]$ intervallumon az $x_i = 0; 0, 2; 0, 5; 0, 8; 1$ alappontokra támaszkodó interpolációs polinomjával. Becsüljük az interpolációs polinommal való közelítés hibáját az $x = 0, 4$ pontban!

Megoldás: A tételünk alapján

$$|f(x) - p_5(x)| \leq \frac{M_5}{5!} |\omega_5(x)|.$$

Az f függvény első deriváltja

$$f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

A második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^4}$$

És így tovább, az ötödik derivált:

$$f^{(5)}(x) = -\frac{6!}{(x+1)^7}.$$

Ezért

$$|f^{(5)}(x)| \leq 6! \quad \forall x \in [0, 1].$$

Így $M_5 := 6!$. Az $x = 0, 4$ pontban a közelítés hibájára

$$|f(0, 4) - p_5(0, 4)| \leq \frac{6!}{5!} |(0, 4 - 0)(0, 4 - 0, 2)(0, 4 - 0, 5)(0, 4 - 0, 8)(0, 4 - 1)| = 0, 01152.$$

Hermite-interpoláció

Az eddig tanult hagyományos interpolációnál általánosabb megközelítés az, amikor az alappontokban nemcsak függvényértéket, hanem deriváltat, sőt akár magasabb rendű deriváltakat is előírunk. A feladat mindig egyértelműen megoldható, ha az egyes alappontokban **a függvényértéktől (nulladik derivált) kezdve valahányadik deriváltig bezárólag** írjuk elő az összes derivált értékét. Az, hogy hányadikig, függhet a ponttól, tehát lehet pl. az a feladat, hogy az egyik alappontban csak függvényértéket (nulladik derivált), egy másik alappontban a függvényértéket és az első deriváltat, egy harmadik pontban pedig a függvényértéket és pl. az első három derivált értékét stb. adjuk meg. (Olyan viszont nem lehet, hogy valamelyik pontban pl. csak a 0. és a 2. deriváltat adjuk meg.) Legyen az x_i pontban m_i darab érték, azaz tegyük fel, hogy az x_i pontban a 0., az 1.,...és az $m_i - 1$ -edik derivált értéke van előírva. Ez összesen $M = \sum_{i=1}^n m_i$ darab feltételt jelent. Ekkor igaz a következő tétel:

0.2 Tétel. *Létezik egyetlen $p \in P_{M-1}$ polinom, amely a megadott összes feltételt kielégíti, azaz amelyre p j -edik deriváltjára $p^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, m_i - 1$.*

Itt is 1-gyel alacsonyabb fokú polinomot tudunk mindig egyértelműen illeszteni, mint ahány feltétel összesen van. (A sima interpolációnál csak n db függvényértéket írtunk elő, és ott $n - 1$ -ed fokú polinomot illeszthettünk.)

Ez a feladat is megoldható differenciátáblázat segítségével, ha szem előtt tartjuk a következő eltéréseket a hagyományos interpolációhoz képest:

1. A táblázat első oszlopában minden alappontot annyiszor veszünk fel, ahány értéket előírtunk az adott pontban (azaz x_i m_i -szer legyen felsorolva egymás alatt).
2. Ha $x_i - x_i = 0$ -val való osztás lépne fel egy k -ad rendű osztott differencia helyén, akkor arra a helyre

$$\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$$

írandó.

Pl. Adjuk meg az $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$, $f''(2) = 0$, $f(3) = 1$ feltételeket kielégítő Hermite-féle interpolációs polinomot!

Megoldás: Most $n = 3$ db pont van, és az egyes pontokhoz tartozó feltételek száma: $m_1 = 1$ (ugyanis $x_1 = 1$ -ben csak a függvényérték van előírva), $m_2 = 3$ ($x_2 = 2$ -ben a függvényérték, az első és a második derivált), $m_3 = 1$ ($x_3 = 3$ -ban csak a függvényérték). Összesen 5 feltétel van tehát, így legfeljebb negyedfokú polinomot keresünk. Elkészítjük a differenciátáblázatot. Ehhez az első oszlopban egymás alá írjuk az alappontokat, a 2-t háromszor, mert ebben a pontban a 0., az 1. és a 2. derivált is meg van adva. Mindegyik pont mellé a hozzá tartozó függvényértéket írjuk (deriváltat nem!). Így mindhárom 2-es érték mellé $f(2) = 1$ írandó:

1	0
2	1
2	1
2	1
3	1

A következő oszlopba az elsőrendű osztott differenciák kerülnek, kivéve azokat a helyeket, ahol $(x_i - x_i)$ -vel osztanánk. Ide $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$ kerül $k = 1$ értékkel. Az x_i pont, amelyiknél ez fellép, az $x_2 = 2$.

1	0	
		$\frac{1-0}{2-1} = 1$
2	1	
		$\frac{f'(2)}{1!} = 3$
2	1	
		$\frac{f'(2)}{1!} = 3$
2	1	
		$\frac{1-1}{3-2} = 0$
3	1	

A negyedik oszlopban hasonlóan járunk el, itt $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$ írandó $k = 2$ és $x_2 = 2$ értékkel, ahol $2-2=0$ -val osztanánk.

$$\begin{array}{rcl}
 1 & 0 & \\
 & \frac{1-0}{2-1} = 1 & \\
 2 & 1 & \frac{3-1}{2-1} = 2 \\
 & \frac{f'(2)}{1!} = 3 & \\
 2 & 1 & \frac{f''(2)}{2!} = 0 \\
 & \frac{f'(2)}{1!} = 3 & \\
 2 & 1 & \frac{0-3}{3-2} = -3 \\
 & \frac{1-1}{3-2} = 0 & \\
 3 & 1 &
 \end{array}$$

Hasonlóan folytatjuk a fennmaradó oszlopokkal, míg már csak egy elem marad az oszlopban. A végső táblázat a következő:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \underline{0} & \\
 & \frac{1-0}{2-1} = \underline{1} & \\
 2 & 1 & \frac{3-1}{2-1} = \underline{2} \\
 & \frac{f'(2)}{1!} = 3 & \frac{0-2}{2-1} = \underline{-2} \\
 2 & 1 & \frac{f''(2)}{2!} = 0 \quad \frac{-3-(-2)}{3-1} = \underline{-\frac{1}{2}} \\
 & \frac{f'(2)}{1!} = 3 & \frac{-3-0}{3-2} = -3 \\
 2 & 1 & \frac{0-3}{3-2} = -3 \\
 & \frac{1-1}{3-2} = 0 & \\
 3 & 1 &
 \end{array}$$

Ezen táblázatot ugyanúgy használjuk az Hermite-féle interpolációs polinom felírására, ahogyan azt a hagyományos interpolációnál tettük. A második oszloptól kezdve minden oszlopból csak a legfelső (aláhúzott) elemre van szükségünk. Tehát

$$p(x) = 0 + 1(x-1) + 2(x-1)(x-2) - 2(x-1)(x-2)^2 - \frac{1}{2}(x-1)(x-2)^3.$$

Megjegyezzük, hogy a határozatlan együtthatók módszere szintén használható Hermite-interpolációra is.