

Alkalmazott analízis

7. gyakorlat

Amikor folytonos függvényt akarunk interpolációs polinommal közelíteni, akkor felmerül a kérdés, hogy hogyan válasszuk meg ehhez az alappontokat. Láttuk: $f \in C^n(I)$ esetén

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_n}{n!} |\omega_n(x)|,$$

ahol $\omega_n(x) := (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ az alappontpolinom. Ez utóbbi kizárólag attól függ, hogy mik az alappontok. Vajon milyen $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontok esetén lesz

$$\max |\omega_n(x)|$$

a lehető legkisebb az I intervallumon?

Legyen $I = [-1, 1]$. Ekkor a kérdésre a választ a Csebisev-polinomok segítségével adhatjuk meg. A Csebisev-polinomok a

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1]$$

képlettel definiált függvények ($n = 0, 1, \dots$).

0.1 Tétel. *Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ alappontok a T_n polinom zérushelyei a $[-1, 1]$ -en, akkor az interpolációs polinom hibájának a maximuma a lehető legkisebb, és érvényes a következő becslés:*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_n}{n!} 2^{n-1} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Számítsuk ki ezeket a zérushelyeket! T_n ott nulla, ahol

$$n \arccos x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

azaz

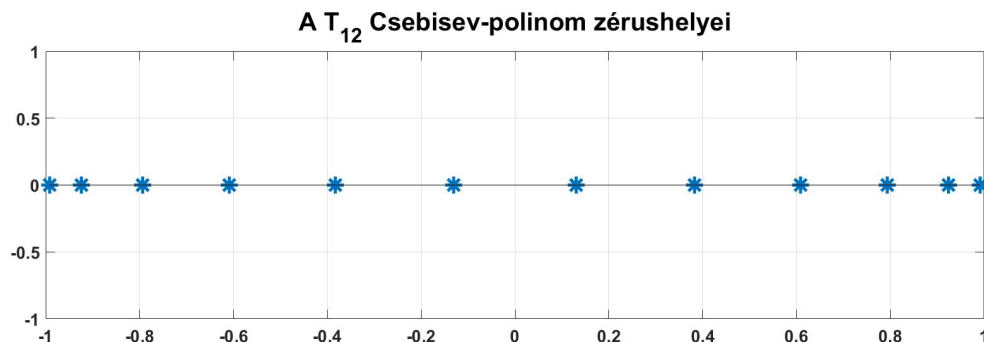
$$\arccos x = \frac{2k-1}{2n} \pi$$

Ebből a zérushelyek az

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n} \pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

számok. (A k egész szám többi értékére is csak ugyanezen gyökök valamelyikét kapjuk meg, ezért elég 1-től n -ig mennie.) Ezek a pontok a $[-1, 1]$ intervallumot nem egyenletesen osztják fel, hanem az intervallum szélei felé sűrűsödnek. Az nullára szimmetrikusan

helyezkednek el. Ha n páratlan, akkor a 0 is alappont, ha páros, akkor a 0 nem alappont. Az alábbi ábrán a T_{12} Csebisev-polinom zérushelyeit ábrázoltuk.



Pl. Közelítsük az $f(x) = x^3 - x$ függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon másodfokú polinommal úgy, hogy a maximális hiba a lehető legkisebb legyen.

Megoldás: Másodfokú polinommal való közelítésnél három alappontot kell felvennünk. Az x_1 , x_2 és x_3 pontok a fentiek értelmében úgy választandók meg, hogy a T_3 Csebisev-polinom zérushelyei legyenek, azaz

$$x_1 = \cos\left(\frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 3} \pi\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 3} \pi\right) = \cos \frac{3\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$x_3 = \cos\left(\frac{2 \cdot 3 - 1}{2 \cdot 3} \pi\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ezen pontokra interpolálhatunk pl. a Newton-féle módszerrel. Ellenőrizzük, hogy eredményül a $p_3(x) = -\frac{1}{4}x$ interpolációs polinomot kapjuk. (Tehát most az illesztett legfeljebb másodfokú polinom egy elsőfokú polinom.)

A fenti tétel értelmében a hibára érvényes a következő becslés:

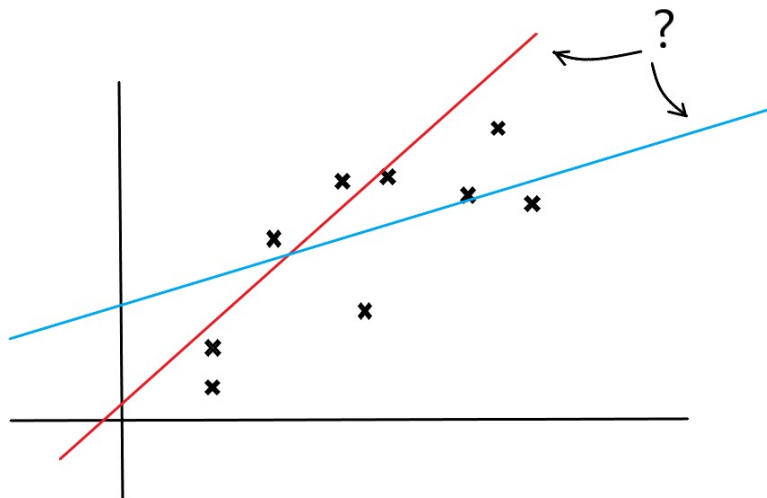
$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{M_3}{3!} \frac{1}{2^2} = \frac{6}{3!} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Tehát az egész intervallum bármely pontjában legfeljebb ekkora hibát követünk el az interpoláció során.

A legkisebb négyzetek módszere

Az interpoláció esetén diszkrét pontokra úgy illesztettünk polinomot, hogy az minden ponton átmenjen. A gyakorlatban azonban nem mindig erre van szükségünk. Képzeljük el,

hogy nagyon sok, nem tökéletesen pontos mérési adatunk van, és ezek nagyjából egy egyenes mentén helyezkednek el. Hogy lehet vajon megtalálni a legjobban illeszkedő egyenest?



Legyenek adva a (t_i, f_i) , $i = 1, 1, \dots, m$ értékpárok, ahol akár $t_i = t_j$ is lehet. (Pl. ha ugyanazon időpontra két vagy több, különböző műszerrel mért mérési adatunk is van.) Szeretnénk a pontokra meghatározott alakú $F(t)$ függvényt illeszteni. (A mi döntésünk, hogy milyen alakú függvényt választunk.) A legegyszerűbb eset az, amikor $F(t) = a + bt$, azaz a függvény elsőfokú polinom. Elvárható-e ekkor, hogy

$$F(t_i) = f_i,$$

azaz

$$a + bt_i = f_i$$

minden i -re teljesüljön ($i = 1, 2, \dots, m$)? Általában nyilván nem, csak ha véletlenül éppen egy egyenesbe esnek a pontok. De onnan is látható ez, hogy ha az m darab egyenletet egyben felírjuk, akkor az

$$\begin{aligned} a + bt_1 &= f_1 \\ a + bt_2 &= f_2 \\ &\vdots \\ a + bt_m &= f_m \end{aligned}$$

lineáris algebrai egyenletrendszert nyerjük az a és b együtthatókra mint ismeretlenekre.

Mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \\ 1 & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \quad (1)$$

Még tömörebben:

$$Ax = f,$$

ahol az ismeretlen vektor az $x = (a, b)^T$, az A együtthatómátrix $m \times 2$ -es méretű, és a szabad tagok oszlopvektora $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, a pontokhoz tartozó függvényértékeket tartalmazó vektor. Ha éppen $m = 2$, vagyis csak két értékpár van, akkor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

így ha $t_1 \neq t_2$, akkor $\det A = t_2 - t_1 \neq 0$, és így létezik egyetlen megoldás. (Ez összhangban van azzal, hogy két, nem egymás alatt elhelyezkedő pontra mindig illeszthetünk pontosan egy elsőfokú függvényt.) Ha azonban $m > 2$, akkor több egyenlet van, mint ahány ismeretlen, vagyis az egyenletrendszer túlhatározott, így rendszerint nincs megoldása. Mit tegyünk tehát, ha $m > 2$? Ekkor kereshetjük azt az $x = (a, b)$ vektort, amelyet ha behelyettesítünk az $Ax = f$ egyenletrendszer bal oldalába, a kapott Ax vektor a jobb oldali f vektorhoz a lehető legközelebb lesz. A közelség mérésére a 2-es normát fogjuk használni, és a normát négyzetre emeljük. Így tehát azon $x \in \mathbb{R}^2$ vektort keressük, amelyre

$$J(x) = \|Ax - f\|_2^2 = \min_x.$$

Részletesebben kiírva, amelyre

$$\sum_{i=1}^m (a + bt_i - f_i)^2 = \min_{a,b}.$$

Ennek a szummának az i -edik tagja az illesztendő elsőfokú függvény t_i -beli értékének és f_i értékének a különbsége négyzetre emelve ("négyzetes eltérés"). Ennek kell a legkisebbnek lennie, innen ered a módszer neve. Ezen J függvény egy differenciálható $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvény, amelynek változói a és b . Minimuma ott lehet, ahol nulla az a és a b szerinti parciális deriváltja is. Deriváljuk ezért parciálisan a bal oldalt a és b szerint, és a kapott

kifejezéseket tegyük egyenlővé nullával:

$$\partial_a J = \partial_a \left(\sum_{i=1}^m (a + bt_i - f_i)^2 \right) = 2 \sum_{i=1}^m (a + bt_i - f_i) = 0$$

$$\partial_b J = \partial_b \left(\sum_{i=1}^m (a + bt_i - f_i)^2 \right) = 2 \sum_{i=1}^m (a + bt_i - f_i)t_i = 0$$

2-vel egyszerűsítve az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$a \cdot m + b \cdot \sum_{i=1}^m t_i = \sum_{i=1}^m f_i$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^m t_i + b \cdot \sum_{i=1}^m t_i^2 = \sum_{i=1}^m t_i f_i$$

Ez is egy lineáris algebrai egyenletrendszer. Mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i f_i \end{bmatrix}$$

(Megmutatható, hogy ha legalább két különböző t_i pont van, akkor $\det A > 0$, és így mindig létezik egyértelmű megoldás.)

P1. Illesszünk elsőfokú polinomot a $(0, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 6)$ pontokra a legkisebb négyzetek módszerével. A négyzetes eltérést is adjuk meg!

Megoldás: Megoldandó az

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m f_i \\ \sum_{i=1}^m t_i f_i \end{bmatrix}$$

lineáris algebrai egyenletrendszer, ahol $m = 4$, $\sum_{i=1}^m t_i = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$, $\sum_{i=1}^m t_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, $\sum_{i=1}^m f_i = 1 + 3 + 4 + 5 = 14$, és $\sum_{i=1}^m t_i f_i = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 29$.

Tehát a rendszer:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Részletesebben kiírva az egyenleteket:

$$4a + 6b = 14$$

$$6a + 14b = 29$$

Ezt az a és b ismeretlenekre megoldva: $a = \frac{11}{10}$ és $b = \frac{8}{5}$. Vagyis a pontokra négyzetes értelemben legjobban illeszkedő elsőfokú függvény: $F(t) = \frac{11}{10} + \frac{8}{5}t$. Kérdés még a négyzetes eltérés, azaz $\|Ax - f\|_2^2$ ezen $x = (a, b) = (\frac{11}{10}, \frac{8}{5})$ esetén. Vigyázat, itt A nem az előző lineáris egyenletrendszer mátrixa, hanem az (1) rendszeré. Most

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \\ 1 & t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A mátrixszorzást elvégezve

$$Ax = A \cdot \begin{bmatrix} \frac{11}{10} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 2,7 \\ 4,3 \\ 5,9 \end{bmatrix}.$$

A kiszámított x vektorra így $Ax - f = (0, 1; -0, 3; 0, 3; -0, 1)^T$, ebből

$$J(x) = \|Ax - f\|_2^2 = \|(0, 1; -0, 3; 0, 3; -0, 1)\|_2^2 = 0,1^2 + 0,3^2 + 0,3^2 + 0,1^2 = 0,2.$$

Ez az alábbi ábrán pirossal jelölt távolságok négyzetének az összege. A pontok helyét kék csillagok jelzik, és berajzoltuk az illesztett függvényt. Nem létezik olyan elsőfokú polinom, amelyre a négyzetes eltérések összege kisebb volna ezen négy pont esetén.

