

Alkalmazott analízis gyakorlófeladatok 1.
Hibaforrások

1. Tekintsük a következő, $n \in \mathbb{N}$ számtól függő integrált:

$$I_n := \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Mutassuk meg, hogy $I_n \rightarrow 0$, és adjunk előre felé lépegető rekurziót I_n kiszámítására!
Ha ez numerikusan instabil, írjuk fel a visszafelé lépegető rekurziót.

Megoldás:

1. $I_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, ugyanis

$$\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq 1 \cdot \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

és a két közrefogó sorozat $\rightarrow 0$. Előrefelé lépegető rekurziót felírhatunk parciális integrálással:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = [x^n(-e^{-x})]_0^1 + \int_0^1 nx^{n-1}e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$$

A kezdőérték: $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$. Beprogramozva láthatjuk, hogy $n = 12$ környékén elromlik. Valóban, ha a kezdeti pontos I_0 érték helyett a számábrázolási hibával terhelt $\tilde{I}_0 := I_0 + \varepsilon$ értékkel indítunk, akkor az n -edik lépésben az

$$\tilde{I}_n = -\frac{1}{e} + n\tilde{I}_{n-1}$$

értéket kapjuk. Bevezetve a hibára a

$$d_n := \tilde{I}_n - I_n$$

jelölést,

$$d_n = -\frac{1}{e} + n\tilde{I}_{n-1} + \frac{1}{e} - nI_{n-1} = nd_{n-1} \Rightarrow d_n = n^n \varepsilon.$$

Azaz $d_n \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$, így numerikus instabilitás lép fel. Ez orvosolható, ha a fenti helyett a visszafelé lépegető

$$I_{n-1} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{e} + I_n \right)$$

rekurziót használjuk, amely már numerikusan stabil. (Nagy N -ből indítva $I_N = 0$ kezdőértékkel számolunk. Ekkor is nyilvánvalóan hibás kezdőértékből indulunk, de az algoritmus nem felerősíti, hanem elnyomja ezt a kezdeti hibát.)