

Alkalmazott analízis gyakorlófeladatok 3. Hibafogalmak, normák

1. Legyen egy henger sugara $R = 1 \pm 0,01$, magassága $h = 2 \pm 0,02$. Számítsuk ki közelítőleg a térfogatát! Határozzuk meg közelítőleg, hogy mekkora lesz az eredmény abszolút hibája. A π értékét vegyük 3,14-nak, és vegyük figyelembe ennek a közelítésnek a hibáját is. (Segítségül: ekkor $\pi = 3,14 \pm 0,005$.)
2. Számoljuk ki zsebszámológépen az $a = \sqrt{20001}$ és a $b = \sqrt{20000}$ szám hét tizedesjegyre kerekített értékét. Közelítsük az $x := a - b$ számot ezen kerekített értékek különbségével, majd becsüljük az abszolút és relatív hibáját.
Az x -et más módon is kiszámíthatjuk: $x = y := \frac{1}{a+b} = \frac{1}{\sqrt{20001} + \sqrt{20000}}$. Melyik számolási mód biztosítja a kisebb hibát?
3. Normát definiál-e $\mathbb{R}^3$ -on a következő függvény?

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto |x_1 + x_2 + x_3|$$

4. Négy mérési hely évi csapadékösszege a 2019-es évre két modellszámítás szerint $P_1 = (512, 600, 621, 550)$ ill. $P_2 = (500, 670, 690, 582)$ (mm). Ha a tényleges (mért) csapadékösszegek vektora $P = (505, 612, 650, 590)$, akkor melyik modell adott jobb közelítést a maximumnormában dolgozva?
5. Előfordulhat-e $P_1, P_2, P \in \mathbb{R}^2$ esetén, hogy valamely $\|\cdot\|_a$ normában $\|P_1 - P\|_a > \|P_2 - P\|_a$, míg egy másik $\|\cdot\|_b$ normában $\|P_1 - P\|_b < \|P_2 - P\|_b$? Adjunk ilyen pontokat, ha lehet!

Megoldások:

1. A közelítő értékeket használva a henger térfogata közelítőleg

$$V = R^2 \pi h \approx 1^2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 6,28.$$

Jelöljük a számítás hibáját ΔV -vel. Az $R^2 \pi h$ szorzatot bontsuk szét az R^2 és πh tényezőkre!

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta(R^2 \pi h) \leq \tilde{\pi} \tilde{h} \cdot (\Delta R^2) + \tilde{R}^2 \cdot \Delta(\pi h) \\ &\leq \tilde{\pi} \tilde{h} (\tilde{R} \cdot \Delta_R + \tilde{R} \cdot \Delta_R) + \tilde{R}^2 (\tilde{h} \cdot \Delta_\pi + \tilde{\pi} \cdot \Delta_h) = 0,1984. \end{aligned}$$

2. $\tilde{a} = 141,4248917$, $\tilde{b} = 141,4213562$, $\tilde{x} = 3,535500000 \cdot 10^{-3}$, $\tilde{y} = 3,535489713 \cdot 10^{-3}$.
A kiindulási értékek abszolút hibakorlátjai: $\Delta_a = \Delta_b = 5 \cdot 10^{-8}$. Az x abszolút és

relatív hibakorlátja: $\Delta_x = \Delta_a + \Delta_b = 10^{-7}$, $\delta_x = \frac{\Delta_x}{x} = \frac{10^{-7}}{3,53549 \cdot 10^{-3}} = 0,283 \cdot 10^{-4}$.

A másik módszerrel számolva: $\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b = 10^{-7}$, aminek felhasználásával $\Delta_y = \Delta_{\frac{1}{a+b}} \approx \frac{|\tilde{a}+\tilde{b}| \cdot \Delta_1 + |1| \cdot \Delta_{a+b}}{(\tilde{a}+\tilde{b})^2} = \frac{10^{-7}}{242^2} = 1,7076 \cdot 10^{-12}$. (Itt felhasználtuk, hogy $\Delta_1 = 0$, mivel az 1 pontos érték.) A relatív hibakorlátra $\delta_y = \delta_{\frac{1}{a+b}} = \frac{\Delta_y}{y} = \frac{1,7076 \cdot 10^{-12}}{3,53549 \cdot 10^{-3}} = 0,483 \cdot 10^{-9}$ adódik. A példában tehát a második számítási módszer öt nagyságrenddel kisebb abszolút és relatív hibát biztosít, mint az első.

3. Nem, ugyanis pl. az $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1 - 0)$ vektorhoz is nullát rendel hozzá, nem csak a $(0,0,0)$ -hoz, így sérül az 1. normatulajdonság.
4. $\|P_1 - P\|_\infty = 40 < \|P_2 - P\|_\infty = 58$, így a maximumnorma szerint az első modell adott jobb közelítést.
5. Igen, pl. legyen $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (1.5, 0)$, $\|\cdot\|_a = \|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_b = \|\cdot\|_1$.