

Alkalmazott analízis gyakorlófeladatok 4.

Ekvivalens normák, mátrixnormák

1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ -ben a $\|\cdot\|_\infty$ és a $\|\cdot\|_2$ norma ekvivalens!
2. Tekintsük a következő mátrixokat: a.) $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ b.) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Számítsuk ki az A és B mátrixnak a három alapvető vektornormához tartozó indukált mátrixnormáját!
3. Egy mátrixnormát szubmultiplikatívnak nevezünk, ha $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ minden $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén. Mutassuk meg, hogy az

$$\|A\| := \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$$

(nem indukált) mátrixnorma nem szubmultiplikatív.

Megoldások:

1. Belátandó, hogy $\exists 0 < m \leq M \in \mathbb{R}$ számok, amelyek mellett

$$m\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \sqrt{\left(\max_{1 \leq k \leq n} |x_k|\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} = \|x\|_2 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|^2} = \\ &= \sqrt{n \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|^2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty \end{aligned}$$

Tehát a belátandó becslés fennáll $m = 1$ és $M = \sqrt{n}$ megválasztással.

2. a.) $\|A\|_1 = \|A\|_{\max} = \pi$, $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\pi^2} = \pi$. (Az $A^T A$ mátrix diagonálmátrix, így sajátértékeit leolvashatjuk a főátlóból.)
b.) $\|B\|_1 = \|B\|_{\max} = 2$, $\|B\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(B^T B)} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})/2} = 1,618$. (Az utóbbi szám a $\det(B^T B - \lambda I) = \lambda(-\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0$ egyenlet megoldásául kapott sajátértékekből (3 db) kapható meg, a legnagyobb sajátértékből gyököt vonva.)
3. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixokra $\|A \cdot B\| = 4 > \|A\| \cdot \|B\| = 2$.