

Alkalmazott analízis gyakorlófeladatok 6.
Az interpolációs polinom hibája, Hermite-interpoláció

1. Interpoláljuk lineárisan az $f(x) = e^{-x}$ függvényt az $x_0 = 0$ és $x_1 = 2$ alappontok között. Adjunk hibakorlátot a közelítésre.
2. Mi lesz az f függvényt közelítő Hermite-féle interpolációs polinom, ha $f(1) = 0$, $f'(1) = 3$, $f(2) = -4$, $f(3) = 1$, $f'(3) = 2$?

Megoldások:

1. Lineáris interpolációnál az interpoláció hibájáról szóló tételből következett ($x \in [x_0, x_1]$ pontokra) az $|f(x) - p(x)| \leq M_2 \frac{(x_1 - x_0)^2}{8}$ formula, ha f kétszer folyt. differenciálható, és $|f''| \leq M_2$. Most $f''(x) = e^{-x} \Rightarrow |f''| \leq 1$ a $[0, 2]$ intervallumon. Ebből $|f(x) - p(x)| \leq 1 \cdot \frac{2^2}{8} = \frac{1}{2}$.
2. $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 2$, így $M = 5 \Rightarrow p \in P_4$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \underline{0} & & & & & \\
 & & \underline{3} & & & & \\
 1 & 0 & & \underline{-7} & & & \\
 & & -4 & & \underline{\frac{23}{4}} & & \\
 2 & -4 & & \underline{\frac{9}{2}} & & \underline{-\frac{19}{4}} & \\
 & & 5 & & \underline{-\frac{15}{4}} & & \\
 3 & 1 & & \underline{-3} & & & \\
 & & 2 & & & & \\
 3 & 1 & & & & &
 \end{array}$$

Ebből $p(x) = 0 + 3(x-1) - 7(x-1)^2 + \frac{23}{4}(x-1)^2(x-2) - \frac{19}{4}(x-1)^2(x-2)(x-3)$