

**Alkalmazott analízis gyakorlófeladatok 7.**  
**Csebisev-alappontok, legkisebb négyzetek módszere**

1. Az  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$  függvényt a  $[-1, 1]$  intervallumon legfeljebb harmadfokú polinommal szeretnénk közelíteni. Hogyan válasszuk meg az interpolációs alappontokat ahhoz, hogy a hiba maximuma a lehető legkisebb legyen? Adjunk becslést ezen maximális hibára.
2. Határozzuk meg a  $(-2, -4), (-1, -2), (0, 1), (1, 2), (2, 4)$  pontokhoz négyzetes értelemben legközelebb haladó elsőfokú függvényt!

*Megoldások:*

1. Legfeljebb harmadfokú polinommal való közelítéshez négy alappontot kell felvenni. A hiba maximuma akkor lesz a lehető legkisebb, ha ezek a Csebisev-alappontok, azaz

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \text{ ahol } k = 1, 2, 3, 4, n = 4.$$

Ebből  $x_1 = \cos(\frac{\pi}{8})$ ,  $x_2 = \cos(\frac{3\pi}{8})$ ,  $x_3 = \cos(\frac{5\pi}{8})$ ,  $x_4 = \cos(\frac{7\pi}{8})$ . A hibabecslő formula:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_n}{n!} \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol  $M_n$  az  $n$ -edik derivált abszolút értékének felső korlátja. Most  $n = 4$ , és az  $f$  függvény negyedik deriváltja mindenhol 24. Ebből

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{24}{4!} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

2.  $m = 5$ ,  $\sum f_i = 1$ ,  $\sum t_i = 0$ ,  $\sum t_i f_i = 20$ ,  $\sum t_i^2 = 10$ , így a megoldandó lineáris algebrai egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ennek megoldása  $a = \frac{1}{5}$ ,  $b = 2$ , így az illesztett egyenes  $F(t) = a + bt = \frac{1}{5} + 2t$ .