

1. Halmazelméleti alapok

A Matematikai kislexikonban a halmaz fogalmára a következő definíciót találjuk: „A halmaz tetszőleges természetű dolgoknak valamilyen módon összegyűjtött összessége.” Ez a definíció azonban nem használható, ugyanis a „halmazt” szinonimával („összesség”) helyettesíti. A halmaz első matematikai definíciója Cantortól származik, aki az 1870-es években még intuitív módon alapozta meg a halmazelméletet. A Cantor-féle halmazelméletben alapfogalom az „elemek valaminek” ($\in$) kijelentés (tehát ezt nem definiáljuk), és egy halmazt az határoz meg, hogy minden dologról egyértelműen eldönthető: eleme-e ennek a halmaznak vagy nem. Rövidesen kiderült azonban, hogy a Cantor-féle halmazelmélet ellentmondásokhoz vezet. Az egyik ilyen paradoxont Bertrand Russell írta le (1902): Vannak halmazok, amelyek önmagukat elemként tartalmazzák, mint például a budapesti egyesületek szövetsége. Ez, minthogy maga is budapesti egyesület, ezért tagja ennek a szövetségnek. Nevezzük az önmagukat elemként nem tartalmazó halmazokat rendez halmazoknak, az önmagukat elemként tartalmazókat pedig rendellenes halmazoknak. Tekintsük az összes rendez halmaz H halmazát. Ez a H halmaz vajon rendez vagy rendellenes? Tegyük fel, hogy H rendez halmaz, azaz önmaga nem eleme. De ekkor nem lehet az összes rendez halmaz benne, hiszen saját maga nincs benne. Tegyük fel, hogy H rendellenes halmaz, azaz eleme saját magának. Ekkor az egyik eleme rendellenes halmaz, tehát H nem lehet az összes rendez halmaz halmaza. Így is, úgy is ellentmondásra jutottunk!

Ezen ellentmondások miatt új alapokra kellett helyezni a halmazelméletet. 1907-ben Zermelo megadta a halmazelmélet axiomatikus felépítését, amelyet később Neumann és Gödel fejlesztett tovább. Ez már mentes a Russel-paradoxonhoz hasonló ellentmondásoktól. Lényege: a halmaz fogalmát nem definiáljuk, hanem mondunk egy axiómarendszert, és ha valami eleget tesz ennek, akkor halmaznak nevezzük. Fontos, hogy ez az axiómarendszer független és ellentmondásmentes legyen. Az előbbi tulajdonság azt jelenti, hogy semelyik axiómát nem lehet a többiből levezetni, az utóbbi pedig azt, hogy bármely két, az axiómákból levezethető állítás nem mond ellent egymásnak. Példaként lássunk két axiómát:

Pl.1. Meghatározottsági axióma: A és B halmaz pontosan akkor egyenlő, ha A minden eleme eleme a B -nek is, és B minden eleme eleme az A -nak is, azaz ha

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Más szóval, egy halmazt egyértelműen meghatároznak az elemei.

Pl.2. Üreshalmaz-axióma: Létezik olyan $\emptyset$ -val jelölt halmaz, amelynek elemeire igaz: ha $x \in \emptyset$, akkor $x \neq x$.

A halmazokat nagybetűvel (pl. A, B), a halmazok elemeit pedig kisbetűvel (pl. a, b, x) szokásos jelölni.

1.1 Definíció. Legyen A egy nemüres halmaz. A B halmazt az A részhalmazának nevezzük, ha

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Jelölés: $B \subset A$ ill $A \supset B$.

Minden A halmaznak része az üres halmaz is és maga A is.

Egy halmazt a következőképpen adhatunk meg:

- Felsoroljuk az elemeit. Pl. $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ (azaz $a_1 \in A, a_2 \in A, a_3 \in A$).
- Definiálunk egy ún. „egyváltozós logikai kijelentést” (jelölje ezt $\tau(x)$), és annak segítségével adjuk meg a halmazt (rendszerint a részhalmaz definiálására szokásos alkalmazni). Pl.

$$\tau(x) : x \text{ napon esett az eső}$$

Jelölje A a 2011-es év napjainak a halmazát. Ekkor a

$$B := \{x \in A : \tau(x) \text{ igaz}\}$$

halmaz azon napok halmaza a 2011-es évből, amikor esett az eső.

1.2 Megjegyzés. Különbség van az a elem és az $\{a\}$ halmaz között! ($a \in \{a\}$).

1.3 Definíció. Az A halmaz összes részhalmazának a halmazát az A hatványhalmazának nevezzük, és $P(A)$ -val jelöljük.

Halmazok között műveleteket is értelmezhetünk.

- „unió”: $A \cup B := \{x : x \in A \text{ vagy } x \in B\}$
- „metszet”: $A \cap B := \{x : x \in A \text{ és } x \in B\}$
- „különbség”: $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ és } x \notin B\}$

1.4 Definíció. Azt mondjuk, hogy A és B diszjunkt halmazok, ha $A \cap B = \emptyset$.

Feladat: Mutassuk meg, hogy $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$.

Legyen A egy tetszőleges halmaz.

1.5 Definíció. Az $A_+ := A \cup \{A\}$ halmazt az A halmaz rákövetkező halmazának (szukcesszorának) nevezzük.

Nyilvánvalóan, $A_+ \supset A$. Kérdés: igaz-e, hogy A_+ ténylegesen bővebb, mint A ? (Lehetnének egyenlők is...)

Tegyük fel, hogy $A_+ = A$. Ekkor

$$A_+ = A = A \cup \{A\} \Rightarrow \{A\} \subset A.$$

Így

$$A \in \{A\} \subset A \Rightarrow A \in A.$$

Felmerül a kérdés: lehet-e egy elem önmaga eleme? A meglévő axiómarendszerből ez nem dönthető el. Lehetne $A \notin A$ és $A \in A$ is. Mi az elsőt fogadjuk el igaznak, következésképpen $A_+ \supset A$ valódi tartalmazást jelent.

1.1. A természetes számok bevezetése

Láttuk, hogy axióma szerint létezik az üres halmaz ($\emptyset$). Jelölje ezt 0. Képezzük a rákövetkező halmazát:

$$0_+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} =: 1$$

Az így kapott halmaznak, amelyet az „1” szimbólummal jelölünk, szintén képezzük a rákövetkező halmazát, ez lesz a 2:

$$1_+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} =: 2$$

$$2_+ = \{0, 1, 2\} = 3$$

és így tovább. Tehát $1 = 0_+, 2 = 1_+, 3 = 2_+, \dots$ Nyilvánvalóan, $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \dots$

Jelölés: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

1.6 Definíció. Ezt a halmazt a természetes számok halmazának nevezzük.

(Később lesznek egyéb számok is...) Az $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ halmazt pozitív természetes számoknak nevezzük.

1.2. Rendezett pár, relációk

Fontos fogalmak alapulnak a rendezett pár és a reláció fogalmán, pl. függvény, halmaz számossága, számok nagyság szerinti rendezése. Legyenek x és y tetszőleges objektumok.

1.7 Definíció. Az x és y elemek rendezett párján az

$$(x, y) := \{x, \{x, y\}\}$$

halmazt értjük.

Tulajdonságai:

- $(x, y) \neq (y, x)$
- $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \text{ és } y = v$

1.8 Definíció. Legyenek X és Y tetszőleges nemüres halmazok. A két halmaz Descartes-szorzatának az

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

rendezett párokból álló halmazt nevezzük.

1.9 Megjegyzés. $X \times Y \neq Y \times X$

1.10 Definíció. Az $\mathcal{R} \subset X \times Y$ részhalmazt (bináris) relációnak nevezzük.

Az $\emptyset$ és a teljes $X \times Y$ halmaz mindig része $X \times Y$ -nak, tehát ezek is relációk.

1.11 Definíció. A $D(\mathcal{R}) := \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in \mathcal{R}\}$ halmazt az R reláció értelmezési tartományának nevezzük. Az $R(\mathcal{R}) := \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in \mathcal{R}\}$ halmazt az R reláció képterének nevezzük. ($D(\mathcal{R}) \subset X, R(\mathcal{R}) \subset Y$.)

1.12 Definíció. Az $\mathcal{R}^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in \mathcal{R}\}$ relációt az $\mathcal{R}$ reláció inverzének nevezzük.

Minden relációnak van inverze!

1.3. Függvények

Korábban a függvényt intuitív módon, hozzárendelésként értelmeztük. Azt azonban nem definiáltuk, hogy mit is értünk hozzárendelésen. Ezt a fogalmat pontosítani tudjuk a rendezett párok és a reláció segítségével!

Legyen $f \subset X \times Y$.

1.13 Definíció. Azt mondjuk, hogy a f reláció függvény, ha $(x, y_1) \in f$ és $(x, y_2) \in f$ esetén $y_1 = y_2$.

Tehát ha $f \subset X \times Y$ egy függvény, akkor olyan (x, y) rendezett párokból áll, amelyekben egy adott első elemhez nem tartozik több különböző második elem. Úgy mondjuk, hogy f minden $x \in D(f)$ elemhez egyértelműen hozzárendel egy $y \in Y$ elemet, vagy f az x helyen y -t veszi fel. Ekkor az $f : X \rightarrow Y$ ill. $f(x) = y$ jelölést alkalmazzuk.

Ha f függvény, f^{-1} nem feltétlenül az! Ha viszont az f^{-1} reláció függvény, akkor f inverz függvényének nevezzük. Könnyen meggondolható, hogy az $f \in X \times Y$ függvénynek pontosan akkor létezik inverz függvénye, ha

$$(x_1, y), (x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2.$$

1.14 Definíció. Ha az f függvénynek létezik inverz függvénye, akkor f -et injektív leképezésnek nevezzük.

Tehát f pontosan akkor injektív, ha $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ ($\forall x_1, x_2 \in D(f)$).

1.15 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény szürjektív, ha $R(f) = Y$.

1.16 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény bijekció, ha

- $D(f) = X$,
- injektív ($\exists f^{-1}$),
- szürjektív ($R(f) = Y$).

Pl.1. Legyen $X \neq \emptyset$, $id_X : x \mapsto x \forall x \in X$. Ekkor $D(id_X) = X$, és id_X nyilván bijekció.

Pl.2. Két különböző hosszúságú, egymással párhuzamos szakasz pontjai között is létesíthetünk bijekciót, ha a kezdőpontjaikat és a végpontjaikat összekötő egyenesek metszéspontjából kiinduló egyenesekkel elmetsszük őket.

Könnyen belátható, hogy ha f bijektív, akkor f^{-1} is az. Továbbá, ha f és g bijektív, akkor $f \circ g$ is az.

1.4. Relációk $X \times X$ -en

Az $X \times X$ Descartes-szorzatot jelölje X^2 . Az X^2 -en értelmezett relációkat X -beli relációknak nevezzük. Ha $(x, y) \in \mathcal{R} \subset X^2$, akkor az $x\mathcal{R}y$ jelölést alkalmazzuk.

Egy X -beli relációnak a következő tulajdonságai lehetnek.

- a.) reflexív, ha $\forall x \in X$ esetén $x\mathcal{R}x$
- b.) irreflexív, ha $\forall x \in X$ esetén $x \not\mathcal{R}x$
- c.) szimmetrikus, ha $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- d.) antiszimmetrikus, ha $x\mathcal{R}y$ és $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
- e.) tranzitív, ha $x\mathcal{R}y$ és $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- f.) teljes, ha minden $x, y \in X$ esetén $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}x$ és $x = y$ közül pontosan egy teljesül.

Pl.1. Diagonális reláció: $\mathcal{R} := \{(x, x), x \in X\}$ - reflexív, szimmetrikus, tranzitív

Pl.2. X : a hallgatók halmaza, $\mathcal{R}$: egy évben születettek - reflexív, szimmetrikus, tranzitív

1.17 Definíció. Ha egy X -beli reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, akkor ekvivalenciarelációnak nevezzük. Jelölés: $\sim$

Pl. X : gyerekek halmaza, $\mathcal{R}$: édestestvérek

X : hallgatók halmaza, $\mathcal{R}$: egy szakra járnak (ha feltesszük, hogy senki nem két vagy több szakos).

1.18 Definíció. Legyen $\sim$ egy X -beli ekvivalenciareláció, $x_0 \in X$. A $H := \{x \in X : x \sim x_0\}$ halmazt az X halmaz $\sim$ relációra vett - ekvivalenciaosztályának nevezzük.

1.19 Tétel. Ha $\sim$ egy tetszőleges X -beli ekvivalenciareláció, akkor X előáll páronként diszjunkt ekvivalenciaosztályok uniójaként.

Pl. az előbbi ekvivalenciarelációk esetén egy ekvivalenciaosztályt alkotnak az egy évben születettek, az édestestvérek, az egy szakra járók stb.

1.20 Definíció. Az olyan $\mathcal{R}$ X -beli relációt, amely irreflexív, tranzitív és teljes, szigorú rendezési relációnak nevezzük. Jele: „ $<$ ”

Pl. „ $\subset$ ” (valódi tartalmazás) $\mathbb{N}_0$ felett.

Tehát $1 < 2$, $2 < 4$ stb.

1.21 Megjegyzés. Rendezési relációnak a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációkat nevezzük. Jele: $\leq$.

1.5. Halmazok számossága

Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer, $A, B \in \mathcal{H}$.

Kérdés: melyik halmaznak van több eleme? (Ez a kérdés egyelőre értelmetlen.)

Az $\mathbb{N}_0$ halmazon $\subset$ meghatároz egy rendezést, és ekkor mondható, hogy pl. $1 < 2$ miatt 1-nek kevesebb eleme van. De tetszőleges halmazok esetén?

Legyen $\mathcal{R}$ egy olyan $\mathcal{H} \cup \mathbb{N}_0$ -beli reláció, amelyet így definiálunk: ARB , ha A és B között létezik bijekció.

1.22 Állítás. *A fenti $\mathcal{R}$ reláció ekvivalenciareláció.*

Biz.:

- $\mathcal{R}$ reflexív, ugyanis $\forall A \in \mathcal{H}$ esetén az id_A függvénnyel ARA .
- $\mathcal{R}$ szimmetrikus: ARB esetén BRA (ha $f : A \rightarrow B$ a bijekció, akkor $f^{-1} : B \rightarrow A$ is bijekció)
- $\mathcal{R}$ tranzitív: ARB és $BRC \Rightarrow ARC$ (ha $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow C$ bijekciók, akkor $g \circ f : A \rightarrow C$ is bijekció)

A korábbi tételünk alapján $\mathcal{H} \cup \mathbb{N}_0$ előáll páronként diszjunkt ekvivalenciaosztályok uniójaként. Minden $\mathcal{H} \cup \mathbb{N}_0$ -beli ekvivalenciaosztályhoz rendeljünk hozzá egy szimbólumot a következőképpen:

- Ha van az osztályban $\mathbb{N}_0$ -beli elem, akkor azt.
- Ha nincs, akkor valamilyen speciális szimbólumot.

Minden halmazhoz azt a szimbólumot rendeljük hozzá, amely az osztályához tartozik. Elnevezés: az A halmaz számossága. Jele: $|A|$.

Következésképpen, ha $A \sim B$, akkor $|A| = |B|$.

Továbbá, ha az A halmaz és egy $\mathbb{N}_0$ -beli elem (= szám) között van bijekció, akkor ez a szám lesz $|A|$.

Pl. $A := \{\text{kutya, szőlő}\}$. Ekkor a $2 := \{0, 1\}$ és A között létezik bijekció $\Rightarrow |A| = 2$.

Az $\mathbb{N}_0$ halmaz nem ekvivalens egyik elemével sem, ennek számosságát χ_0 („alef null”) jelölje.

1.5.1. Rendezés a számosságok között

Mit értsünk azon, hogy az egyik halmaznak nagyobb a számossága, mint a másiknak? Ha $|A|$ és $|B|$ $\mathbb{N}_0$ -beli, akkor természetesen az $\mathbb{N}_0$ -beli korábbi rendezés jó. De mi van akkor, ha nem $\mathbb{N}_0$ -beli?

1.23 Definíció. Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Azt mondjuk, hogy A számossága ($|A|$) nagyobb, mint B számossága ($|B|$), ha

a.) $A \not\sim B$ (nincs közöttük bijekció)

b.) $\exists A^* \subset A : A^* \sim B$ (A -nak van olyan részhalmaza, amely ekvivalens B -vel).

Jelölés: $|A| > |B|$.

Ez nyilván kiterjesztése a korábbi „ $>$ ” rendezésnek.

1.24 Definíció. Egy A halmazt véges számosságú halmaznak nevezünk, ha $|A| \in \mathbb{N}_0$. Egy A halmazt megszámlálhatóan végtelen számosságúnak nevezünk, ha $|A| = \aleph_0$. Egy A halmazt megszámlálható számosságú halmaznak nevezünk, ha A véges (azaz $|A| \in \mathbb{N}_0$) vagy $|A| = \aleph_0$.

Könnyen meggondolható, hogy egy véges halmaz minden részhalmaza is véges, továbbá véges halmazok uniója, metszete és különbsége is véges.

1.25 Megjegyzés. Ha A és B véges halmazok, és A valódi részhalmaza B -nek, akkor $|A| < |B|$. De ha nem véges halmazok, akkor $|A| = |B|$ is lehet! (Gondoljunk pl. az $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}_0$ halmazokra. Itt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$, de létezik közöttük bijekció, így a számosságuk egyenlő.)

1.5.2. Hatványhalmaz számossága

Ha $|A| = n \in \mathbb{N}_0$, akkor $|P(A)| = 2^n$. Tehát ekkor $|P(A)| > |A|$. Megmutatható, hogy ez igaz tetszőleges számosságú halmazokra is. (Belátható, hogy $P(A) \not\sim A$, és ekkor ez nyilván igaz.) Ezért nem lehet legnagyobb számosságú halmazról beszélni! (Mert ha lenne, ennek hatványhalmaza még nagyobb számosságú lenne.)

Probléma: Létezik-e $\aleph_0$ -nál nagyobb számosságú halmaz? (Persze, a $P(\mathbb{N}_0)$ halmaz biztos, hogy ilyen!) Hogyan tudunk ilyen halmazt konstruálni?

1.6. Az $\mathbb{R}$ számtest felépítése

1.6.1. A test fogalma

Legyen $\mathbb{F} \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, és definiáljunk két $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ típusú függvényt („műveletet”): $+$ és $\cdot$. Elnevezés: „összeadás”, „szorzás”. Tegyük fel, hogy ezek a műveletek kielégítik az alábbi axiómarendszert.

A.) Az összeadás axiómái (Jelölés: $+(a, b) =: a + b$)

1. $a + b \in \mathbb{F} \forall a, b \in \mathbb{F}$

2. $a + b = b + a$ (kommutativitás)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asszociativitás)
4. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{F} : a + \mathbf{0} = a \ \forall a \in \mathbb{F}$ (nullelem létezése)
5. $\forall a \in \mathbb{F} \exists (-a) \in \mathbb{F} : a + (-a) = \mathbf{0}$ (ellentett elem létezése)

B.) Az szorzás axiómái (Jelölés: $\cdot(a, b) =: a \cdot b$)

1. $a \cdot b \in \mathbb{F} \ \forall a, b \in \mathbb{F}$
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutativitás)
3. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asszociativitás)
4. $\exists \mathbf{1} \in \mathbb{F} : a \cdot \mathbf{1} = a \ \forall a \in \mathbb{F}$ (egységelem létezése)
5. $\forall a \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{F} : a \cdot a^{-1} = \mathbf{1}$ (inverz elem létezése)

C.) Disztributivitási szabály

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

1.26 Definíció. Ha az $\mathbb{F}$ -en értelmezett $+$ és $\cdot$ műveletek kielégítik a fenti axiómákat, akkor az $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ hármastestnek nevezzük.

Pl.1. $\mathbb{F} = P(X)$ (hatványhalmaz), $+$: unió, $\cdot$: metszet. Testet alkotnak-e? Nem!

Pl.2. $\mathbb{F} = \mathbb{N}_0$, $+$ és $\cdot$ az ismert műveletek. Test-e? Nem!

Egyelőre nem tudunk példát mondani testre...

Térjünk vissza a 2. példára. Mi volt itt a gond?

- 1.) A5 axióma: nincsenek ellentett elemek. Ezért adjunk hozzá $\mathbb{N}_0$ -hoz új elemeket: $\forall n$ esetén $(-n)$ egy olyan elem, amelyre A5 igaz. Jelölje ezt a halmazt $\mathbb{Z}$ (egész számok halmaza). Terjesszük ki erre a $+$ műveletet. (Pl. $(-1) + (-2) := -(1 + 2)$ stb.) Így $(\mathbb{Z}, +)$ ún. kommutatív csoport (az összeadásra minden axióma teljesül).
- 2.) $\mathbb{N}_0$ -ban a B5 tulajdonság sem érvényes. Először $\mathbb{Z}$ -re terjesszük ki a szorzást. (Pl. $(-2) \cdot (-3) := 6$ stb.) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ még nem test így sem, hiszen B5 nem teljesül. Vegyünk hozzá új elemeket: $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ elemhez $\frac{1}{n}$ jelölje azt az új elemet, amelyre $n \cdot \frac{1}{n} = \mathbf{1}$. (Ez az $\frac{1}{n}$ tehát csak jelölés!) Terjesszük ki a szorzást az ilyen típusú elemekre is. Jelölés: $m \in \mathbb{Z}$ és $\frac{1}{n}$ szorzatát $\frac{m}{n}$ -nel jelöljük. Vegyük az összes ilyen elem (szám) halmazát, és jelöljük $\mathbb{Q}$ -val.

1.27 Megjegyzés. Ha $\frac{m}{n}$ és $\frac{a}{b}$ olyan $\mathbb{Q}$ -beli számok, amelyekre $m \cdot b = n \cdot a$, akkor ezeket ekvivalensnek nevezzük (egy ekvivalenciaosztályba tartoznak) és nem különböztetjük meg egymástól. Ezért m és n mindig relatív prímek.

$\mathbb{Q}$ -ban a következőképpen értelmezzük a műveleteket:

$$\frac{m}{n} \oplus \frac{a}{b} := \frac{m \cdot b + a \cdot n}{n \cdot b}$$

$$\frac{m}{n} \odot \frac{a}{b} := \frac{m \cdot a}{n \cdot b}$$

Ekkor $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ test! (Elnevezés: a racionális számok teste.)

Értelmezhető rendezés is ($<$): $\frac{a}{b}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($a, b, m, n > 0$) esetén legyen

$$\frac{a}{b} < \frac{m}{n}, \text{ ha } a \cdot n < m \cdot b.$$

(Ez egy $\mathbb{N}_0$ -beli rendezés. A többi $\mathbb{Q}$ -beli esetre nyilvánvalóan kiterjeszthető. Ezzel $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot, \leq)$ egy teljesen rendezett (szám)test. Jelölje a továbbiakban $\mathbb{Q}_0^+$ a nemnegatív racionális számok halmazát, $\mathbb{Q}^+$ pedig a pozitív racionális számok halmazát.

Kérdés: mit mondhatunk $\mathbb{Q}$ számosságáról?

Könnyen láthatóan $|\mathbb{Q}| = \chi_0$ (lásd: Cantor-féle elrendezés).

Probléma: Létezik-e olyan $p \in \mathbb{Q}$ szám, amelyre $p^2 := p \cdot p = 2$?

Nem, ugyanis tegyük fel, hogy $p = \frac{m}{n}$ ilyen, ekkor

$$p^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2,$$

azaz $m^2 = 2n^2$. Ebből az következik, hogy m páros, vagyis $4|m^2$ (m^2 osztható 4-gyel). Így $2|n^2 \Rightarrow 2|n$. Ekkor n is páros kell, hogy legyen. Így azonban $\frac{m}{n}$ tovább egyszerűsíthető lenne, ami ellentmondás.

Tehát az $x^2 = q$ ($q \in \mathbb{Q}$) egyenletnek nincs mindig megoldása a racionális számok körében.

1.28 Definíció. Egy $H \subset \mathbb{Q}$ számhalmazt felülről (alulról) korlátosnak nevezünk, ha létezik $M \in \mathbb{Q}$ (ill. $m \in \mathbb{Q}$), amelyre

$$q \leq M \quad (q \geq m) \quad \forall q \in H. \quad (1)$$

Ha H felülről és alulról is korlátos, akkor korlátos számhalmaznak nevezzük; M és m a H felső ill. alsó korlátja.

1.29 Definíció. Azt mondjuk, hogy $H \subset \mathbb{Q}$ számhalmaznak létezik maximuma (mini-

muma), ha létezik $M \in H$ (ill. $m \in H$):

$$q \leq M \quad (q \geq m) \quad \forall q \in H. \quad (2)$$

Jelölés: $\max H = M$ ($\min H = m$).

Nem minden korlátos számhalmaznak létezik maximuma ill. minimuma!

$$H := \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots \right\} \quad (3)$$

Ha egy halmaz korlátos, tetszőleges számú korlátja van. Pl. (3)-ban $\forall M \geq 1$ szám felső korlát, $\forall m \leq 0$ alsó korlát. Ha létezik maximum, akkor a felső korlátoknak létezik legkisebbike, nevezetesen $\max H$. Pl. a

$$H = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

számhalmazra $\max H = 1$, és ez a legkisebb felső korlát.

1.30 Definíció. Egy $H \subset \mathbb{Q}$ felülről (alulról) korlátos számhalmaz legkisebb felső (legnagyobb alsó) korlátját, ha az létezik, a számhalmaz szupremumának (infimumának) nevezzük. Jelölés: $\sup H$, $\inf H$.

1.31 Következmény. Ha $\exists \max H$, akkor $\sup H = \max H$. Ha pedig $\exists \sup H$ és $\sup H \in H$, akkor $\exists \max H$, és $\max H = \sup H$.

Kérdés: mindig létezik $\sup H$?

Legyenek $A, B \subset \mathbb{Q}$ a következő számhalmazok:

$$A := \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\};$$

$$B := \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 > 2\}.$$

Nyilván $A \cup B = \emptyset$, és A felülről, B alulról korlátos.

Létezik-e $\max A$ ($\min B$)?

Nem, ugyanis $\forall p \in A \exists q \in A : q > p$. Nevezetesen:

$$q := p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}.$$

Ekkor

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} < 0 \Rightarrow q \in A.$$

És $q > p$, tehát nem létezik $\sup H$.

Hasonlóképpen igazolható, hogy $\min B$ sem létezik.

Létezik-e $\sup A$ $\mathbb{Q}$ -ban? Nem, ugyanis A felső korlátjainak halmaza azon $M \in \mathbb{Q}$ számok, amelyekre $M^2 \geq 2$. Mivel $M^2 = 2$ esetén $\nexists M \in \mathbb{Q}$ (beláttuk), így $\sup A = \min B$, de ez utóbbi nem létezik.

Cél: úgy kiterjeszteni a $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot, <)$ testet, hogy minden korlátos számhalmaznak létezzen ezen új számtestben $\sup$ -ja és $\inf$ -je. Ez egy bonyolult eljárás, amelynek eredményeként egy új számtestet, nevezetesen $\mathbb{R}$ -t kapjuk. Erre kiterjesztjük a $+, \cdot, \leq$ műveleteket és relációt is. $\Rightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$: a rendezett valós számtest.

Új elemek hozzávétele: a korlátos számhalmaz $\sup$ -ja ($\inf$ -je). Pl. $\sup A =: \sqrt{2}$ („gyök kettő”). Elnevezés: „a 2 szám négyzetgyöke”. Hasonlóan: $\sqrt{p}$ ($p \geq 0$).

1.32 Megjegyzés. $\mathbb{R}$ elemei felírhatók végtelen tizedes tört alakban.

Következmények:

Minden $H \neq \emptyset$ korlátos halmazra:

- $\sup H, \inf H \in \mathbb{R}$;
- ha $\exists \max H$ ($\min H$), akkor $\sup H = \max H$ ($\inf H = \min H$);
- $M = \sup H \Leftrightarrow$ 1.) $\forall x \in H$ esetén $x \leq M$; 2.) $\forall \varepsilon > 0 \exists x^* \in H : M - \varepsilon < x^*$.

1.6.2. Számegyenes

A számegyenes egy geometriai fogalom. Definiálható rajta rendezés: $E < P$, ha $\overline{EP}$ irányítotttsága pozitív. Az egyenes mint pontthalmaz és $\mathbb{R}$ között létezik művelet- és rendezéstartó bijekció.

1.6.3. $\mathbb{R}$ számosság

1.33 Állítás. $|\mathbb{R}| \neq \chi_0$, sőt, $|\mathbb{R}| > \chi_0$.

Biz.: Indirekt. Tegyük fel, hogy létezik $\mathbb{R}$ és $\mathbb{N}_0$ között bijekció, ekkor $\mathbb{R}$ elemei sorba rakhatók:

$$0 \mapsto x_0 = 0.a_0^0 a_1^0 a_2^0 \dots,$$

$$1 \mapsto x_1 = 0.a_0^1 a_1^1 a_2^1 \dots,$$

$\vdots$

ahol $0 \leq a_i^k \leq 9$. Ekkor a táblázatban minden $\mathbb{R}$ -beli szám szerepel. De: legyen

$$b_i = \begin{cases} a_i^i + 1, & \text{ha } a_i^i \leq 8 \\ 0, & \text{ha } a_i^i = 9. \end{cases}$$

Ekkor az $y = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ szám nincs a táblázatban. Tehát $\mathbb{R} \approx \mathbb{Q}$. De $\mathbb{R} \supset \mathbb{N}_0$, így $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}_0|$. Jelölés: $\zeta := |\mathbb{R}|$ (kontinuum-számosság).

Így $\zeta > \chi_0$. De vajon létezik-e köztes számosság? Cantor sejtése: nincs (ez az ún. kontinuumhipotézis). Cohen 1963-ban megmutatta, hogy ez a halmazelmélet axiómáival nem dönthető el. Mi mindig **feltesszük**, hogy nincs.

$$\zeta = 2^{\chi_0} \quad (\mathbb{R} = P(\mathbb{N}_0)).$$

1.6.4. Bővített számhalmaz ($\overline{\mathbb{R}}$)

Bővítsük ki $\mathbb{R}$ -t két új, speciális elemmel, amelyeket $+\infty$ és $-\infty$ jelöl.

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

(Figyelem: $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$!)

Terjesszük ki a $<$ $\mathbb{R}$ -beli rendezési relációt $\overline{\mathbb{R}}$ -re a következő axiómákkal:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $a < +\infty$
2. $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $a > -\infty$
3. $-\infty < +\infty$

1.34 Következmény. Ha $H \subset \mathbb{R}$ ($H \neq \emptyset$) felülről (alulról) nem korlátos $\mathbb{R}$ -ben, akkor $\sup H = +\infty$ ($\inf H = -\infty$).

1.35 Megjegyzés. Ha $H = \emptyset$, akkor $\sup H = -\infty$, $\inf H = +\infty$.
Ha $H \neq \emptyset$, akkor mindig $\inf H \leq \sup H$.

1.36 Megjegyzés. $\overline{\mathbb{R}}$ nem számtest, mivel $+$ és $\cdot$ nincs kiterjesztve.

2. Számsorozatok

Emlékeztető:

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényeket valós számsorozatoknak nevezzük.

• **2.1 Definíció.**

Azt mondjuk, hogy az $a \equiv (a_n)$ sorozatnak létezik határértéke $\overline{\mathbb{R}}$ -ban, ha

- $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |a_n - \alpha| < \varepsilon \forall n \geq N$;

- $\forall P > 0 \exists N = N(P) : a_n \geq P \forall n \geq N$,

Az első esetben $\lim a_n = \alpha$, a második esetben $\lim a_n = +\infty$. (Lehet $\lim a_n = -\infty$ is.)

2.2 Definíció. Ha $\exists \lim a_n$, és az véges, a sorozatot konvergensnek nevezzük.

2.1. Műveletek sorozatokkal

Legyenek $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor értelmesek az alábbi műveletek:

$$a + b; \quad \lambda \cdot a; \quad a \cdot b; \quad \frac{a}{b} :$$

$$(a + b) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : (a + b)(n) = a(n) + b(n) \equiv a_n + b_n$$

$$(\lambda \cdot a) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : (\lambda \cdot a)(n) = \lambda \cdot a(n) \equiv \lambda \cdot a_n$$

$$(a \cdot b) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : (a \cdot b)(n) = a(n) \cdot b(n) \equiv a_n \cdot b_n$$

$$\frac{a}{b} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \left(\frac{a}{b}\right)(n) = \frac{a(n)}{b(n)} = \frac{a_n}{b_n} \quad (b_n \neq 0)$$

Kérdés: Ha $(a_n), (b_n)$ konvergens sorozatok, akkor a műveletek hogyan hatnak a konvergenciára?

2.3 Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) stacionárius sorozat, ha $\exists \alpha \in \mathbb{R} : a_n = \alpha \forall n$.

2.4 Definíció. Egy (a_n) sorozatot nullasorozatnak nevezünk, ha $\lim a_n = 0$.

Nyilvánvalóan, (a_n) nullasorozat $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon \forall n \geq N$.

2.5 Definíció. Egy (a_n) sorozatot korlátos sorozatnak nevezünk, ha $\exists K \geq 0 : |a_n| \leq K \forall n$.

2.6 Állítás. Legyenek $(a_n), (b_n), (c_n)$ olyan sorozatok, amelyekre

a.) (a_n) és (b_n) nullasorozat;

b.) (c_n) korlátos sorozat.

Ekkor $(a_n + b_n)$ és $(c_n \cdot a_n)$ is nullasorozat.

Biz.:

a.) $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1$ és $N_2 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N_1$, és $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq N_2$. Ekkor $\forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ esetén

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon.$$

b.) Tegyük fel, hogy $|c_n| \leq K \forall n$, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel (a_n) nullasorozat, $\exists N : |a_n| < \frac{\varepsilon}{K} \forall n \geq N$. Így

$$|a_n \cdot c_n| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

2.7 Állítás. Minden konvergens sorozat korlátos.

Biz.: Tegyük fel, hogy $\lim a_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Ez azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Így $\varepsilon = 1$ esetén is létezik N_1 index, amelyre

$$|a_n - \alpha| < 1 \quad \forall n \geq N_1.$$

Jelölés: $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1}|, |\alpha| + 1\}$

Mivel $|a_n| - |\alpha| \leq |a_n - \alpha| < 1 \quad \forall n \geq N_1$, ezért

$$|a_n| \leq 1 + |\alpha| \quad \forall n \geq N_1.$$

Ezért $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2.8 Következmény. Ha (a_n) és (b_n) nullasorozat, akkor $a_n \cdot b_n$ is az. (Ugyanis (a_n) nullasorozat, (b_n) pedig korlátos, így alkalmazható az előző állítás b.) pontja.)

2.9 Állítás. $\lim a_n = \alpha \Leftrightarrow (a_n - \alpha)$ nullasorozat.

Biz.: $\lim a_n = \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$(a_n - \alpha)$ nullasorozat $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

2.10 Állítás. Legyenek $(a_n), (b_n)$ tetszőleges konvergens sorozatok, $\lambda \in \mathbb{R}$ rögzített szám. Ekkor

a.) $(a_n + b_n)$ is konvergens, és $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$;

b.) $(\lambda \cdot a_n)$ is konvergens, és $\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim a_n$;

c.) $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens, és $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$;

d.) ha $\lim b_n \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n}$ is konvergens, és $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

Biz.: Jelölések: $A := \lim a_n, B := \lim b_n$ ($A, B \in \mathbb{R}$)

a.) $(a_n - A)$ és $(b_n - B)$ nullasorozatok $\Rightarrow ((a_n - A) + (b_n - B))$ is nullasorozat $\Rightarrow ((a_n + b_n) - (A + B))$ is nullasorozat $\Leftrightarrow \lim(a_n + b_n) = A + B$.

b.) Tekintsük a $(\lambda(a_n - A))$ sorozatot! Mivel λ egy stacionárius (korlátos!) sorozat $\Rightarrow$ ez

nullsorozat $\Rightarrow ((\lambda a_n) - (\lambda A))$ is nullsorozat $\Rightarrow \lim(\lambda a_n) = \lambda A$.

c.) $a_n b_n - AB = (a_n - A)b_n + (b_n - B)A$. Itt mindkét tag egy nullsorozat és egy korlátos sorozat szorzatsorozata, a két tag nullához tart, így az összegsorozat is nullsorozat.

d.) Először belátjuk, hogy ha $B \neq 0$, akkor az $(\frac{1}{b_n})$ sorozat korlátos!

$\lim b_n = B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : |b_n - B| < \varepsilon \forall n \geq N$.

Legyen $\varepsilon := \frac{|B|}{2}$. Ekkor $\exists N_1 : |b_n - B| < \frac{|B|}{2} \forall n \geq N_1$.

Ekkor

$$|b_n| = |b_n - B + B| = |B - (B - b_n)| \geq |B| - |B - b_n| \geq |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}$$

$\forall n \geq N_1$.

Jelölés: $K := \max \left\{ \frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \dots, \frac{1}{|b_{N_1}|}, \frac{2}{|B|} \right\} \Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} \right| \leq K \forall n$. Ebből következik, hogy

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} = \frac{1}{b_n}(a_n - A) + \frac{A}{Bb_n}(B - b_n)$$

nullsorozat.

2.2. Műveletek $\overline{\mathbb{R}}$ -ban

Beláttuk, hogy ha $(a_n), (b_n)$ olyan sorozatok, amelyekre $\exists \lim a_n \in \mathbb{R}$, akkor az összeadás illetve szorzás érvényes a határértékekre is.

Kérdés: Mi mondható el, ha $\exists \lim a_n, \exists \lim b_n$, de ezek $\overline{\mathbb{R}}$ -beliek? (Ki lehet-e terjeszteni a műveleteket $(+ \text{ és } \cdot)$ $\overline{\mathbb{R}}$ -ra?)

Pl. Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \lim a_n = 5, (b_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\lim b_n = +\infty$. Ekkor $\exists \lim(a_n + b_n) = +\infty$. Ez akkor is igaz, ha 5 helyett tetszőleges c valós számhoz tart az (a_n) sorozat. Ezért értelmes az ilyen művelet-kiterjesztés $\overline{\mathbb{R}}$ -ban:

$$c + (+\infty) = +\infty \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

esetén.

Ilyen módon a következő axiómákhoz jutunk:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$$

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\begin{aligned} (+\infty) \cdot \lambda &= \lambda \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } \lambda > 0 \\ -\infty, & \text{ha } \lambda < 0. \end{cases} \\ (-\infty) \cdot \lambda &= \lambda \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } \lambda > 0 \\ +\infty, & \text{ha } \lambda < 0. \end{cases} \\ (+\infty) \cdot (+\infty) &= (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \\ (+\infty) \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

3. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \frac{\lambda}{+\infty} = \frac{\lambda}{-\infty} = 0.$

2.11 Megjegyzés. Ha $\lambda = 1$, akkor $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$, azaz a $+\infty$ és $-\infty$ elem inverze is a nulla. Egyedül a 0 az a szám, amely két különböző $\overline{\mathbb{R}}$ -beli elem inverze.

Probléma: Nem mindent definiáltunk! Pl. $0 \cdot (+\infty) = ?$ Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $a_n = \frac{\alpha}{n}$, $b_n = n$. Ekkor $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow +\infty$, $a_n \cdot b_n = \alpha$. Tehát egy nullához és egy $+\infty$ -hez tartó sorozat szorzata bárhova tarthat, így $0 \cdot (+\infty)$ nem definiálható.

2.12 Következmény. Mivel hasonlóképpen nem definiálhatók a

1. $(+\infty) + (-\infty); (+\infty) - (+\infty); (-\infty) - (-\infty),$
2. $0 \cdot (+\infty); (+\infty) \cdot 0; 0 \cdot (-\infty); (-\infty) \cdot 0,$
3. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty},$

műveletek, ezért $\overline{\mathbb{R}}$ nem test.

2.13 Következmény. Legyenek $(a_n), (b_n)$ olyan sorozatok, amelyekre $\exists \lim a_n, \lim b_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor a műveleti tulajdonságok érvényben maradnak a limeszekre, ha a jobb oldalon lévő művelet értelmes $\overline{\mathbb{R}}$ -ban.

2.3. Majoráns (minoráns) elv

Könnyen meggondolhatók az alábbi állítások.

2.14 Állítás. Tegyük fel, hogy $\lim a_n = +\infty$, és (b_n) egy olyan sorozat, amelyre $b_n \geq a_n$ valamely N indextől kezdve. Ekkor $\lim b_n = +\infty$.

2.15 Állítás. Tegyük fel, hogy $\lim a_n = 0$, és (b_n) egy olyan sorozat, amelyre $|b_n| \leq |a_n|$ valamely N indextől kezdve. Ekkor $\lim b_n = 0$.

2.16 Állítás. Tegyük fel, hogy

- $a_n \leq c_n \leq b_n$,
- $\exists \lim a_n, \lim b_n$ és $\lim a_n = \lim b_n = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor $\exists \lim c_n$, és $\lim c_n = \alpha$.

Pl. Határozzuk meg a

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

sorozat határértékét!

$$a_n := \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}; b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow a_n \leq c_n \leq b_n, \lim a_n = \lim b_n = 1 \Rightarrow \lim c_n = 1.$$

2.17 Állítás. Tegyük fel, hogy $a_n \leq b_n$, $\exists \lim a_n, \lim b_n$. Ekkor $\lim a_n \leq \lim b_n$. (Biz.: Indirekt! Tegyük fel, hogy $\lim b_n > \lim a_n$.)

2.4. Monoton sorozatok

2.18 Definíció. Egy (a_n) sorozatot

- monoton növénynek nevezünk, ha $a_1 \leq a_2 \leq \dots$,
- monoton fogyónak nevezünk, ha $a_1 \geq a_2 \geq \dots$,
- szigorúan monoton növénynek nevezünk, ha $a_1 < a_2 < \dots$,
- szigorúan monoton fogyónak nevezünk, ha $a_1 > a_2 > \dots$.

Ha (a_n) egyike a fentieknek, akkor monoton sorozatnak nevezzük.

Nyilvánvalóan, egy szigorúan monoton növény (fogyó) sorozat egyben monoton növény (fogyó) is.

2.19 Állítás. Minden monoton sorozatnak létezik határértéke $\overline{\mathbb{R}}$ -ben, nevezetesen, ha

- ha (a_n) monoton növény, akkor $\lim a_n = \sup(a_n)$,
- ha (a_n) monoton fogyó, akkor $\lim a_n = \inf(a_n)$.

Biz.: Tegyük fel, hogy (a_n) monoton növény.

1. Legyen (a_n) korlátos. Ekkor $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha = \sup(a_n)$. Mutassuk meg, hogy $\exists \lim a_n$ és $\lim a_n = \alpha$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a sup definíciója szerint létezik $N \in \mathbb{N} : a_N > \alpha - \varepsilon$. Ugyanakkor, a monotonitás miatt $a_n \geq a_N > \alpha - \varepsilon \forall n \geq N$. Ezért

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - \alpha| < \varepsilon \forall n \geq N \Leftrightarrow \lim a_n = \alpha.$$

2. Tegyük fel, hogy (a_n) nem korlátos. Ekkor $\forall P > 0 \exists a_N : a_N > P$. (Ellenkező esetben (a_n) korlátos lenne P -vel!) Mivel $a_n \geq a_N \forall n \geq N$, ezért

$$\forall P > 0 \exists N : a_n \geq P \forall n \geq N \Leftrightarrow \lim a_n = +\infty.$$

Tehát mindkét esetben $\lim a_n = \sup(a_n)$. (Így a 2.17 állítás szinte triviális monoton sorozatokra: ha $a_n \leq b_n$, akkor $\sup(a_n) \leq \sup(b_n) \Leftrightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$.)

2.20 Következmény. *Ha az (a_n) monoton sorozat korlátos is, akkor konvergens. (Ennek a megfordítása is igaz. Ha az (a_n) monoton sorozat konvergens, akkor korlátos is. De ez nem túl érdekes állítás, ugyanis ez igaz minden (nem csak monoton) sorozatra!)*

Összefoglalva, egy monoton sorozat pontosan akkor konvergens, amikor korlátos.

2.5. Részsorozatok

Egy (a_n) sorozat részsorozatának nevezünk egy olyan sorozatot, amelyet az eredeti (a_n) -ből úgy kapunk, hogy a sorozat bizonyos (véges vagy végtelen sok) elemeit elhagyjuk úgy, hogy még végtelen sok elem maradjon, és a megmaradó elemek sorrendjét nem változtatjuk meg. A pontosabb definíció a következő.

2.21 Definíció. *Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges sorozat, $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növvő függvény (azaz $k_1 < k_2 < k_3 \dots$). Az $a \circ k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatot az eredeti (a_n) sorozat egy részsorozatának nevezzük.*

Ezért $(a \circ k)(n) = a_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Nyilvánvalóan $k_n \geq n$.

Pl. 1: $k = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Ekkor $a \circ k = a$.

Pl. 2: $k = 2 \cdot \text{id}_{\mathbb{N}}$. Ekkor $(a \circ k)(n) = a_{2n}$.

2.22 Állítás. *Ha az $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra $\exists \lim a_n = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor minden részsorozatának is létezik határértéke, és*

$$\lim(a \circ k) = \alpha.$$

Biz.:

1. Tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathbb{R}$. (Azaz (a_n) konvergens.) Ekkor

$$\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Mivel $k_n \geq n$, ezért $|a_{k_n} - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Így az a_{k_n} sorozat is α -hoz tart.

2. Tegyük fel, hogy $\alpha = +\infty$. Ekkor

$$\forall P > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq P \quad \forall n \geq N.$$

Hasonlóan, $k_n \geq n$ miatt ekkor $a_{k_n} \geq P$ is igaz, azaz $\lim a_{k_n} = +\infty$.

2.23 Következmény. *Ha egy sorozatnak létezik két olyan részsorozata, amelyek különböző határértékhez tartanak, akkor az eredeti sorozatnak nincs határértéke. Pl. $a_n = (-1)^{n+1}$.*

2.24 Állítás. *(Egymásba skatulyázott zárt intervallumok tétele)*

Legyenek $I_n := [a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) ún. egymásba skatulyázott zárt intervallumok, azaz $I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n$. Ekkor létezik legalább egy olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $c \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Biz.: A feltétel miatt (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, amelyekre

a.) (a_n) monoton növekvő és felülről korlátos

b.) (b_n) monoton fogyó és alulról korlátos.

Ezért $\exists \lim a_n =: a$ és $\exists \lim b_n =: b$. Mivel $a_n \leq b_n$, ezért $\lim a_n \leq \lim b_n \Leftrightarrow a \leq b$. Így

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tehát $\forall c \in [a, b]$ esetén $c \in [a_n, b_n] = I_n \quad \forall n$.

2.25 Következmény. *(Cantor-féle közösponttétel)*

Legyenek I_n egymásba skatulyázott zárt intervallumok, és tegyük fel, hogy $\lim(\text{diam} I_n) = 0$. Ekkor létezik egyetlen $c \in \mathbb{R}$, amelyre $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Biz.: $\lim(\text{diam} I_n) = \lim(b_n - a_n) = 0 \Leftrightarrow a = b \Rightarrow c \in [a, a] = \{a\}$.

2.26 Megjegyzés. *Az I_n zártsága nem hagyható el! (Az $I_n := (0, \frac{1}{n})$ intervallumok metszete pl. nem tartalmaz egyetlen közös pontot sem.)*

2.27 Állítás. *(Bolzano–Weierstrass-tétel)*

Minden korlátos (a_n) sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.

Biz.: A feltétel szerint $\exists K \geq 0 : |a_n| \leq K \ \forall n$. Jelölje I_0 a $[-K, K]$ intervallumot. (Ekkor $a_n \in I_0 \ \forall n$.) Felezzük meg I_0 -t! Ekkor a $[-K, 0]$ ill. $[0, K]$ intervallumok közül legalább az egyik végtelen sok (a_n) -beli elemet tartalmaz. Jelölje ezt az intervallumot I_1 . Folytatva az eljárást, építsünk fel egy (I_n) intervallumsorozatot. Ekkor tehát:

1. (I_n) egymásba skatulyázott zárt intervallumok;
2. mindegyik intervallum végtelen sok (a_n) -beli elemet tartalmaz;
3. mivel $\text{diam} I_n = \frac{K}{2^{n-1}}$, ezért $\lim(\text{diam} I_n) = 0$. Ekkor a Cantor-tétel alapján $\exists! c \in \mathbb{R}$, amelyhez az I_n intervallumok végpontjai tartanak. Építsük most fel az (a_n) c -hez tartó részsorozatát! Legyen $a_{k_1} \in I_1$ tetszőleges. Legyen most $a_{k_2} \in I_2$ olyan elem, amelyre $k_2 > k_1$. (Ilyen mindig van, mert I_2 végtelen sok (a_n) -beli elemet tartalmaz.) Hasonlóan válasszuk ki az $a_{k_3}, a_{k_4}, \dots$ elemeket, ahol tehát $a_{k_n} \in I_n$. Ekkor

$$0 \leq |a_{k_n} - c| \leq \text{diam} I_n \rightarrow 0,$$

vagyis a rendőrelv alapján $a_{k_n} - c \rightarrow 0$, azaz $\lim a_{k_n} = c$.

2.28 Megjegyzés. Ha $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor nyilván létezik olyan részsorozata, amely $+\infty$ -hez tart. Ugyanis legyen a_{k_1} egy olyan elem, amelyre $a_{k_1} \geq 1$, a_{k_2} olyan elem, amelyre $a_{k_2} \geq 2$ és $k_2 > k_1$, stb. Így $a_{k_n} \geq n$, és mivel $\lim n = +\infty$, azért a majoráló tétel értelmében $\lim a_{k_n} = +\infty$. Hasonlóan, ha $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ alulról nem korlátos, akkor létezik olyan részsorozata, amely $-\infty$ -hez tart.

2.29 Következmény. Minden $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatból kiválasztható olyan részsorozat, amelynek van határértéke.

2.6. Cauchy-sorozatok (Belső kritérium)

2.30 Definíció. Egy $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezünk, ha $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq N$.

2.31 Állítás. Ha (a_n) konvergens, akkor Cauchy-sorozat is.

Biz.: $\lim a_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq N$. Így $\forall m, n \geq N :$

$$|a_m - a_n| = |a_m - \alpha + \alpha - a_n| \leq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

Igaz-e a megfordítás?

2.32 Állítás. Ha (a_n) Cauchy-sorozat, akkor konvergens is.

Biz.:

1. Először belátjuk, hogy (a_n) korlátos sorozat.

Mivel (a_n) Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon = 1$ mellett a definícióból következik, hogy

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N_1.$$

Ezért $m = N_1$ megválasztással

$$|a_n - a_{N_1}| < 1 \quad \forall n \geq N_1.$$

Ebből következik, hogy

$$|a_n| - |a_{N_1}| \leq |a_n - a_{N_1}| < 1 \quad \forall n \geq N_1 \Rightarrow |a_n| \leq 1 + |a_{N_1}| \quad \forall n \geq N_1.$$

Tehát $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1-1}|, 1 + |a_{N_1}|\}$ mellett $|a_n| \leq K \quad \forall n \geq N$.

2. Megmutattuk, hogy minden korlátos sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.

Legyen ez most $(a_{k_n}) \subset (a_n)$, és $\lim a_{k_n} = \alpha$. Megmutatjuk, hogy $\exists \lim a_n$, és $\lim a_n = \alpha$.

Mivel (a_n) Cauchy-sorozat, ezért

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m, n \geq N_2.$$

Mivel $k_n \geq n$, ezért $m = k_n$ megválasztással

$$|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2.$$

Másrészt $\lim a_{k_n} = \alpha \Rightarrow \exists N_3 : |a_{k_n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_3$. Legyen $N := \max\{N_2, N_3\}$. Ekkor $\forall n \geq N$:

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.33 Következmény. Egy (a_n) sorozat pontosan akkor konvergens, amikor Cauchy-sorozat.

Pl. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

(a_n) szigorúan monoton növekedő $\Rightarrow \exists \lim a_n = \sup(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Megmutatjuk, hogy $\lim a_n = +\infty$ (nem konvergens).

Indirekt! Tegyük fel, hogy konvergens. Ekkor Cauchy-sorozat is:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow \exists N : |a_n - a_m| < \frac{1}{2} \quad \forall n, m \geq N$.

Legyen most $n = 2N, m = N$. $\Rightarrow$

$$|a_{2N} - a_N| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} < \frac{1}{2}$$

lenne, de ha minden tagban $\frac{1}{2N}$ -t írunk, akkor kisebbítjük:

$$\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} > \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \dots + \frac{1}{2N} = N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

ami ellentmondás.

A sorozat egyébként igen lassan konvergál a végtelenhez, amit jól jelez, hogy $a_{1000} = 7,48$, és $a_{10^6} = 14,39 \dots$

2.7. Parciális limesz, $\liminf$, $\limsup$

Nem minden sorozatnak létezik határértéke.

Cél: a határérték fogalmának kiterjesztése, mégpedig oly módon, hogy minden (a_n) sorozathoz egyértelműen hozzárendelhesünk egy $\overline{\mathbb{R}}$ -beli elemet, amely egyrészt jellemzi a sorozatot, másrészt ha $\exists \lim a_n$, akkor azt rendelje hozzá.

2.34 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ az (a_n) sorozat parciális limesze, ha az (a_n) sorozatnak létezik α -hoz tartó részsorozata. A parciális limeszek halmazát $\partial(a_n)$ jelölje.

Pl.

1. $a_n = (-1)^{n+1} : \partial(a_n) = \{-1, 1\}$
2. $a_n = \frac{1}{n} : \partial(a_n) = \{0\}$.

2.35 Állítás. Minden sorozatnak létezik parciális limesze, azaz $\partial(a_n) \neq \emptyset$.

Biz.: Következik a Bolzano–Weierstrass-tételből, ill. annak 2.29 következményéből.

2.36 Definíció. A $\partial(a_n)$ nem üres $\overline{\mathbb{R}}$ -beli halmaz infimumát és szupremumát az (a_n) sorozat limesz inferiorjának és limesz superiorjának nevezzük. Jelölés: $\liminf a_n$, $\limsup a_n$ vagy $\underline{\lim} a_n$, $\overline{\lim} a_n$.

Előző példáinkban

1. $\underline{\lim}(-1)^n = -1; \overline{\lim}(-1)^n = 1$.
2. $\underline{\lim}(\frac{1}{n}) = \overline{\lim}(\frac{1}{n}) = 0$.

Könnyen meggondolható, hogy igaz a következő

2.37 Állítás. Tetszőleges $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ esetén

$$a.) \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n$$

$$b.) \exists \lim a_n \Leftrightarrow \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n, \text{ és ekkor } \lim a_n = \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$$

$$c.) (a_n) \text{ konvergens} \Leftrightarrow \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n \in \mathbb{R}.$$

3. Folytonos függvények

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

3.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy f folytonos az $x_0 \in D(f)$ pontban, ha minden olyan $(x_n) \subset D(f)$ sorozatra, amelyre $x_n \rightarrow x_0$, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Ha f folytonos $\forall x_0 \in H \subset D(f)$ pontban, akkor H -n folytonosnak nevezzük. Ha f folytonos $D(f)$ -en, akkor folytonos függvénynek nevezzük.

3.1. Korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvények

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz. Azaz: H korlátos $\Leftrightarrow \exists K > 0 : |x| \leq K \forall x \in H$, és H zárt $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset H$ sorozatra, amelyre $\exists \lim x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in H$ (tartalmazza minden torlódási pontját).

3.2 Állítás. Egy H halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden $(x_n) \subset H$ sorozatból kiválasztható H -ban konvergens részsorozat, azaz

$$\forall (x_n) \subset H \exists (x_{k_n}) : \exists \lim x_{k_n} \in H. \quad (*)$$

Biz.:

1. ($\Rightarrow$) Tegyük fel hogy H korlátos és zárt. Mutassuk meg $(*)$ -t!

Legyen $(x_n) \subset H$ tetszőleges. Mivel H korlátos, ezért (x_n) is korlátos, így a Bolzano–Weierstrass-tétel értelmében létezik (x_{k_n}) konvergens részsorozata, azaz $\lim x_{k_n} = \alpha$. De H zárt is $\Rightarrow \alpha \in H$.

2. ($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy $(*)$ igaz. Mutassuk meg, hogy ekkor H korlátos és zárt.

a.) H korlátos, ugyanis (indirekt módon) tegyük fel, hogy H nem korlátos. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ -hez létezik $x_n : x_n > n$. (Az egyszerűség kedvéért azt tesszük fel, hogy felülről nem korlátos.) $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$. De ekkor minden részsorozata is $+\infty$ -hez tart, azaz nem választható ki belőle konvergens részsorozat. (Minden konvergens sorozat korlátos.)

b.) H zárt. Ugyanis legyen (x_n) konvergens sorozat H -ban. Ekkor $(*)$ alapján létezik H -ban konvergens részsorozata, azaz $\exists (x_{k_n}) : \lim x_{k_n} = \alpha \in H$. De ha $\exists \lim x_n \in \mathbb{R}$, akkor $\lim x_n = \lim x_{k_n} = \alpha$. Így H zárt is.

3.3 Állítás. Tegyük fel, hogy $H \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor $f(H) \subset \mathbb{R}$ is korlátos és zárt. (Átfogalmazva: korlátos és zárt halmaz folytonos képe is korlátos és zárt.)

Biz.: Következik az előző állításból. Elegendő belátni, hogy $f(H)$ -ra teljesül a (*) feltétel, azaz $\forall (y_n) \subset f(H)$ sorozatból kiválasztható $f(H)$ -ban konvergens (y_{k_n}) részsorozat.

$(y_n) \in f(H) \Rightarrow \exists x_n : f(x_n) = y_n$. Tekintsük ezt az $(x_n) \subset H$ sorozatot! Mivel H korlátos és zárt, ezért $\exists (x_{k_n})$ részsorozata, amelyre $\exists \lim x_{k_n} = x_0 \in H$. Mivel f folytonos H -n, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \Rightarrow y_{k_n} \rightarrow y_0 := f(x_0)$, azaz $y_0 \in f(H)$.

3.4 Következmény. Korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény korlátos.

3.5 Állítás. (Weierstrass tétele)

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor az $f(H) \subset \mathbb{R}$ számhalmaznak létezik maximuma és minimuma.

Biz.: Az előző tételből következik. $f(H)$ korlátos $\Rightarrow \sup f(H) =: M < +\infty$, $\inf f(H) =: m > -\infty$ ($m \leq M$). Mivel M szuprémuma az $f(H)$ halmaznak, ezért egy M -nél kisebb szám már nem felső korlátja, azaz

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in f(H) : y_n > M - \frac{1}{n}.$$

Mivel $y_n \leq M$, így $M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$. Következésképpen $\exists \lim y_n = M$.

Mivel $(y_n) \subset f(H)$ és $f(H)$ zárt is, így $M \in f(H)$, azaz f felveszi valamely $x_0 \in H$ pontban M értékét. (inf-re ugyanígy.)

3.6 Megjegyzés. A tétel három feltétele együttesen elégséges feltételei a maximum és a minimum létezésének. Azonban egyik feltétel sem szükséges (lásd pl. az $f(x) = D(x)$ függvényt a $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon).

3.2. Egyenletes folytonosság

Az x_0 -beli folytonosság definíciójából: ha f folytonos x_0 -ban, akkor $\forall x_n \rightarrow x_0$ esetén $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Mit jelent: $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$?

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Átfogalmazva: f x_0 -beli folytonossága azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f) \text{ és } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Mitől függ δ ? Nyilván ε -tól és x_0 -tól.

Kérdés: Hogyan viselkedik δ rögzített ε esetén egy H halmazon? Megadható-e univerzális δ az egész H -ra?

Pl. 1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $H = (0, 1]$. Számítsuk ki, hogy adott $x_0 \in H$ pontot véve, és rögzítve ε -t, mekkora δ -t kell választanunk. A függvény a nullához közeledve egyre meredekebb, így az alkalmas δ -t az

$$f(x_0 - \delta) = f(x_0) + \varepsilon$$

összefüggésből számíthatjuk (ugyanis x_0 -tól jobbra kell kisebb δ -t választanunk). Ez az

$$\frac{1}{x_0 - \delta} = \frac{1}{x_0} + \varepsilon$$

összefüggést jelenti. Ebből

$$x_0 - \delta = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \varepsilon},$$

és így

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = x_0 - \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \varepsilon} = x_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon x_0}\right)$$

Könnyen látható, hogy

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} \delta(\varepsilon, x_0) = 0,$$

vagyis minél közelebb van x_0 a nullához, annál kisebb δ -t kell választanunk.

Pl. 2. $f(x) = x$, $H = [0, 1]$. Ekkor a $\delta = \varepsilon$ megválasztás az egész H -n jó.

3.7 Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos a $H_1 \subset H$ halmazon, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x_1, x_2 \in H_1 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (4)$$

3.8 Definíció. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos, ha $H_1 = H$ -ra is érvényes (4).

3.9 Következmény. Ha f egyenletesen folytonos, akkor folytonos is.

3.10 Következmény. Ha f egyenletesen folytonos H -n, akkor minden $H_1 \subset H$ halmazon is egyenletesen folytonos.

Igaz-e 3.9 megfordítása? Láttuk, hogy nem! Igaz azonban a következő

3.11 Állítás. (Heine tétele)

Tegyük fel, hogy H korlátos és zárt, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f egyenletesen folytonos.

Biz.: Indirekt. Tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos, azaz

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta : \exists u, v \in H : |u - v| < \delta, \text{ de } |f(u) - f(v)| \geq \varepsilon. \quad (5)$$

Legyen speciálisan $\delta := \frac{1}{n}$. Ekkor (5) $\Rightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists u_n, v_n \in H : |u_n - v_n| < \frac{1}{n}, \text{ de } |f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon. \quad (6)$$

Tekintsük ezt a két $(u_n), (v_n)$ sorozatot. (Mindkettő H -beli.) Mivel $(u_n) \subset H$ és H korlátos és zárt, ezért létezik (u_{k_n}) részsorozata, amelyre

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = u^* \in H. \quad (7)$$

Tekintsük most a (v_{k_n}) részsorozatát a (v_n) sorozatnak! Mivel (6) alapján

$$|u^* - v_{k_n}| \leq |u^* - u_{k_n}| + |u_{k_n} - v_{k_n}| \leq |u^* - u_{k_n}| + \frac{1}{k_n},$$

és így (7) $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{k_n} = u^* \quad (8)$$

Tehát

$$\lim u_{k_n} = \lim v_{k_n} = u^* \in H. \quad (9)$$

Mivel f folytonos H -n, ezért

$$\lim f(u_{k_n}) = \lim f(v_{k_n}) = f(u^*). \quad (10)$$

Így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(u_{k_n}) - f(v_{k_n})| = 0,$$

de ez ellentmond (6)-nak.

3.12 Megjegyzés. A Heine-tételt (1873) Riemann már korábban alkalmazta, de bizonyítás nélkül.

Feladat. Legyen $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 1)$. Egyenletesen folytonos-e?

3.13 Állítás. (Az inverz függvény folytonossága)

Legyen H korlátos és zárt, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és bijektív. Ekkor $f^{-1} : R(f) \rightarrow H$ is folytonos.

Biz.: Indirekt. Tegyük fel, hogy f^{-1} nem folytonos, azaz

$$\exists y_0 \in R(f) \text{ és } (y_n) \subset R(f), y_n \rightarrow y_0, \text{ de } f^{-1}(y_n) \not\rightarrow f^{-1}(y_0) \quad (11)$$

Jelölések: $x_n = f^{-1}(y_n), x_0 = f^{-1}(y_0)$ (azaz $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$.) Ekkor (11) $\Rightarrow x_n \not\rightarrow x_0$, azaz

$$\exists \delta > 0 : |x_n - x_0| \geq \delta \quad (12)$$

végtelen sok n index esetén. Vegyük ki ezeket az elemeket mint részsorozatot:

$$(x_{\tilde{n}}) \subset (x_n) : |x_{\tilde{n}} - x_0| \geq \delta \quad \forall \tilde{n} \quad (13)$$

Mivel $(x_{\tilde{n}}) \subset H$, így $(x_{\tilde{n}})$ -ből kiválasztható konvergens részsorozat, amely H -ban konvergens:

$$\exists (x_{k_n}) \subset (x_{\tilde{n}}) \subset (x_n) : \exists \lim x_{k_n} = \bar{x} \in H \quad (14)$$

(13) $\Rightarrow$

$$|x_{k_n} - x_0| \geq \delta. \quad (15)$$

Így (14)–(15) $\Rightarrow$

$$\bar{x} \neq x_0. \quad (16)$$

Mivel f folytonos $\bar{x} \in H$ -ban, így

$$f(x_{k_n}) \rightarrow f(\bar{x}). \quad (17)$$

Másrészt $y_n \rightarrow y_0$ miatt $y_{k_n} \rightarrow y_0 = f(x_0)$, azaz

$$f(x_{k_n}) \rightarrow f(x_0) \quad (18)$$

(17)–(18) $\Rightarrow f(\bar{x}) = f(x_0)$, és mivel f bijektív, ez ellenmond (18)-nak.

3.3. Intervallumon értelmezett folytonos függvények

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. A továbbiakban az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényekkel foglalkozunk. (Ha $I = [a, b]$, akkor az előző szakasz valamennyi tétele érvényben marad.)

3.14 Állítás. Legyen $a < b$ és $[a, b] \subset I, \phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha $\phi(a) < 0 < \phi(b)$, akkor $\exists c \in (a, b)$, amelyre $\phi(c) = 0$.

Biz.: Építsünk fel egy $I_n = [a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatot.

1. $a_0 := a, b_0 := b$

2. I_{n-1} -ből I_n -t a következő módon nyerjük:

- $c_n := \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$
- ha $\phi(c_n) > 0$, akkor $a_n := a_{n-1}, b_n = c_n$
 ha $\phi(c_n) < 0$, akkor $a_n := c_n, b_n = b_{n-1}$
 ha $\phi(c_n) = 0$, akkor $c = c_n$ a keresett pont.

3. Folytatjuk az eljárást.

Nyilván (a_n) monoton növekedő, míg (b_n) monoton fogyó sorozat, és korlátosak $\Rightarrow$ konvergensek is. Jelölje az (a_n) sorozat határértékét a^* , a (b_n) -ét b^* . Ekkor

$$|b_n - a_n| = \frac{b - a}{2^n} \Rightarrow \lim(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow b^* = a^*.$$

Ezért, az $a_n \leq c_n \leq b_n$ tulajdonság miatt $\exists \lim c_n =: c = a^* = b^*$.

Tehát $\lim a_n = c$ és $\lim b_n = c$, és ϕ folytonossága miatt

$$\lim \phi(a_n) = \phi(c); \quad \lim \phi(b_n) = \phi(c).$$

Ugyanakkor, a konstrukció miatt

$$\phi(a_n) < 0 \text{ és } \phi(b_n) > 0.$$

Ekkor $\lim \phi(a_n) \leq 0$ és $\lim \phi(b_n) \geq 0$. Így $\phi(c) \leq 0$ és $\phi(c) \geq 0 \Leftrightarrow \phi(c) = 0$.

3.15 Állítás. (Bolzano tétele)

Legyen f folytonos $[a, b]$ -n, és tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$. Ekkor f minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz, azaz

$$\forall \alpha \in (f(a), f(b)) \exists c \in (a, b) : f(c) = \alpha. \quad (19)$$

Biz.: Alkalmazzuk az előző állítást a $\phi(x) = f(x) - \alpha$ függvényre!

$$\phi(a) < 0, \phi(b) > 0 \Rightarrow \exists c : \phi(c) = 0 \Rightarrow f(c) - \alpha = 0 \Rightarrow f(c) = \alpha.$$

3.16 Következmény. Egy folytonos függvény semmilyen értéket nem ugorhat át.

3.17 Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Darboux-tulajdonságú, ha $\forall x, y \in D(f), f(x) < f(y)$ esetén érvényes a következő:

$$\forall \alpha \in (f(x), f(y)) \exists \zeta \in (x, y) : f(\zeta) = \alpha.$$

3.18 Következmény. *Az intervallumokon értelmezett folytonos függvények Darboux-tulajdonságúak.*

A Bolzano-tétel egy másik következménye:

3.19 Következmény. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $D(f)$ egy intervallum, akkor a képtér is intervallum. (Ha $D(f)$ korlátos és zárt, akkor $R(f)$ is az.)*

4. A differenciálszámítás válogatott elemei

Emlékeztető:

- Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f differenciálható (röv. diffható) az $x_0 \in \text{int}D(f)$ pontban, ha létezik és véges a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

határtérték. Azt mondjuk, hogy f diffható, ha $\forall x_0 \in \text{int}D(f)$ pontban diffható.

- Tanultuk a műveleti szabályokat.

4.1. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai

4.1 Definíció. *Azt mondjuk, hogy f lokálisan növekszik az $x_0 \in \text{int}D(f)$ pontban, ha $\exists K(x_0) \subset D(f)$, hogy*

- $\forall x \in K(x_0), x < x_0$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$;
- $\forall x \in K(x_0), x > x_0$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$

Azt mondjuk, hogy f szigorúan lokálisan növekszik az $x_0 \in \text{int}D(f)$ pontban, ha $\exists K(x_0) \subset D(f)$, hogy

- $\forall x \in K(x_0), x < x_0$ esetén $f(x) < f(x_0)$;
- $\forall x \in K(x_0), x > x_0$ esetén $f(x) > f(x_0)$

(A lokális csökkenést ill. szigorúan lokális csökkenést értelemszerűen ugyanígy definiáljuk.)

4.2 Következmény. *Ha f monoton növekvő, akkor minden pontban lokálisan növekszik.*

Megmutatható a fordított állítás: ha f egy intervallum mindegyik pontjában lokálisan növekszik, akkor f monoton növő. (A bizonyítás indirekt, a Cantor-féle közosponttételen alapul.) Ugyanakkor, ha f lokálisan növekszik egy $x_0 \in \text{int}D(f)$ pontban, akkor ebből nem következik, hogy létezik olyan kis $K(x_0)$ környezet, amelyen monoton lenne.

Pl.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 2x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ez a függvény $x_0 = 0$ -ban lokálisan nő.

Hogyan lehet felismerni a lokális növekedést?

4.3 Állítás. Legyen $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ és f diffható az $x_0 \in (a, b)$ pontban. Ekkor

1. ha f lokálisan nő x_0 -ban, akkor $f'(x_0) \geq 0$;
2. ha $f'(x_0) > 0$, akkor f szigorúan lokálisan nő x_0 -ban.

Biz.:

1. Tegyük fel, hogy f lokálisan nő x_0 -ban. Ekkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in K(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

2. Tegyük fel, hogy $f'(x_0) > 0$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \exists K(x_0) : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in K(x_0), x \neq x_0,$$

azaz

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0), \text{ ill. } x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in K(x_0).$$

A tétel nem élesíthető!

- Ha $f'(x_0) \geq 0$, akkor ebből nem következik, hogy f növekszik x_0 -ban. (Pl. $f(x) = -x^3$, $x_0 = 0$.)
- Ha f x_0 -ban szigorúan lokálisan nő, akkor ebből nem következik, hogy $f'(x_0) > 0$. (Pl. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.)

A lokális csökkenésre analóg tételek vannak.

4.4 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in \text{int}D(f)$ pontban lokális maximuma van, ha $\exists K(x_0) \subset D(f) : f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in K(x_0)$. (Lokális minimum: $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in K(x_0)$.) A lokális minimumot ill. maximumot lokális szélsőértéknek nevezzük.

4.5 Állítás. Ha f diffható x_0 -ban, és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Biz.: Indirekt. Tegyük fel, hogy $f'(x_0) \neq 0$. Ekkor f az x_0 pontban szigorúan lokálisan nő vagy csökken, de nem lehet ekkor lokális szélsőértéke.

4.6 Megjegyzés. A megfordítás nem igaz: ha $f'(x_0) = 0$, abból nem következik, hogy lokális szélsőértéke van ebben a pontban (lásd $f(x) = x^3$).

Tehát az $f'(x_0) = 0$ szükséges feltétele a lokális szélsőértéknek.

4.2. A differenciálható függvények globális tulajdonságai

4.7 Állítás. (Rolle tétele)

Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre

- $f \in C[a, b]$;
- $f \in D(a, b)$;
- $f(a) = f(b)$.

Ekkor $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Biz.: $f \in C[a, b] \Rightarrow \exists \max$ és $\min [a, b]$ -n.

- Ha ezek valamelyike (a, b) -n van, ott lokális szélsőérték is van, és mivel f diffható, $f'(c) = 0$ ezen pontban.
- Ha egyiket sem veszi fel (a, b) -n, akkor az egyik végpontban van a maximum, a másikban a minimum. De ekkor a feltétel miatt $f(x) = \text{const.}$, és ezért $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$.

4.8 Következmény. Ha $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ és $f'(x) \neq 0$ (a, b) -n, akkor $f(a) \neq f(b)$.

4.9 Megjegyzés. A Rolle-tétel geometriai jelentése: az adott feltételek mellett az f függvénynek létezik az x -tengellyel párhuzamos érintője.

4.10 Megjegyzés. A három feltétel együtt alkot egy elégséges feltételt.

4.11 Állítás. (Cauchy tétele)

Legyenek $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ az alábbi tulajdonságú függvények:

1. $f, g \in C[a, b]$,

2. $f, g \in D(a, b)$,

3. $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.

Ekkor $\exists c \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Biz.: Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ olyan szám, amelyre a

$$h(x) := f(x) - \alpha g(x)$$

függvényre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei:

Nilván $h \in C[a, b] \cap D(a, b)$, és $f(a) - \alpha g(a) = f(b) - \alpha g(b)$ akkor teljesül, ha

$$\alpha(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) \Rightarrow \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

(Itt $g(a) \neq g(b)$ a Rolle-tétel következménye miatt!)

Ekkor $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \alpha g'(c) = 0$. Ez pedig $g'(c) \neq 0$ esetén éppen a belátandó egyenlőséget jelenti.

4.12 Állítás. (Lagrange-középértéktétel)

Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$. Ekkor $\exists c \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Biz.: Következik a Cauchy-tételből $g = \text{id}$ megválasztással.

4.13 Megjegyzés. A Lagrange-középértéktétel geometriailag azt jelenti, hogy a feltételek esetén a függvénynek létezik az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokat összekötő húrral párhuzamos érintője.

4.14 Megjegyzés. Szokásosabb alak: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

4.15 Megjegyzés. Ha $f(b) = f(a)$, akkor a Rolle-tételt kapjuk.

4.16 Megjegyzés. A két feltétellel együtt alkot elégséges feltételt.

4.3. A középértéktételek következményei

4.17 Állítás. (A monoton növekedés tétele)

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diffható. Ekkor

- f monoton növekvő I -n $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$.
- ha $f'(x) > 0$ I -n, akkor f szigorúan monoton növekvő.

Biz.:

1./a.) Tegyük fel, hogy f monoton növekvő. Ekkor mindegyik pontjában lokálisan növekszik $\Rightarrow f'(x) \geq 0$.

1./b.) Tegyük fel, hogy $f'(x) \geq 0$. Minden $x_1 < x_2$ I -beli pontra alkalmazva a Lagrange-középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumon:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

2. Ha $f'(x) > 0$, akkor a Lagrange-középértéktételből

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

(Ugyanez a tétel monoton fogyásra értelemszerűen átfogalmazható.)

4.18 Következmény. Ha $f \in C(I)$ (I egy intervallum), és f diffható $\text{int} I$ -n, továbbá $f'(x) = 0 \ \forall x \in \text{int} I$, akkor f konstans I -n.

Biz.: Lagrange-középértéktétel $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I \ \exists c \in (x_1, x_2) :$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \equiv 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1).$$

4.19 Megjegyzés. Ha I nem intervallum, az állítás nem igaz!

4.20 Megjegyzés. A monoton növekedés tételének második részét nem lehet megfordítani. (Ha f szigorúan monoton növekvő, abból még nem következik, hogy $f' > 0$. Pl. $f(x) = x^3$.)

4.21 Állítás. Tegyük fel, hogy $h \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $h(a) \geq 0$, $h'(x) \geq 0$ (a, b) -n, ekkor $h \geq 0$ (a, b) -n.

Biz.: Lagrange-középértéktétel $\Rightarrow \forall x \in (a, b)$

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(c) \Rightarrow h(x) = h(a) + h'(c)(x - a) \geq 0.$$

4.22 Megjegyzés. Ha $h'(x) > 0$ (a, b) -n, akkor $h(x) > 0$ $(a, b]$ -n.

4.23 Következmény. Tegyük fel, hogy $f, g \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $f(a) \geq g(a)$, $f' \geq g'$. Ekkor $f \geq g$ $[a, b]$ -n. (Ugyanis $h(x) := f - g$ megválasztással az előző állításból ez következik.)

Ha $f' > g'$, akkor $f > g$ $[a, b]$ -n.

Pl. Mutassuk meg, hogy $\ln(1+x) < x$, ha $x > 0$!

Legyen $f(x) = x$, $g(x) = \ln(1+x)$. Ekkor $f(0) = g(0)$, $f'(x) = 1$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f' > g'$.

4.4. A deriváltfüggvény tulajdonsága

Mi lehet deriváltfüggvény?

4.24 Állítás. (Darboux tétele)

Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$. Ekkor f' Darboux-tulajdonságú (a, b) -n.

Biz.: Legyen $a < x_1 < x_2 < b$ és $f'(x_1) < f'(x_2)$. Mutassuk meg, hogy minden $\alpha \in (f'(x_1), f'(x_2))$ számhoz létezik olyan $c \in (x_1, x_2)$: $f'(c) = \alpha$.

Tekintsük a $h(x) = f(x) - \alpha x$ függvényt! Mivel $h'(x) = f'(x) - \alpha$, ezért $h'(x_1) < 0 < h'(x_2)$.

Nilván $h \in C[x_1, x_2]$, ezért létezik max. és min. $[x_1, x_2]$ -n. Mivel a végpontokban a deriváltak nem nullák, a bal oldali végpontban szigorúan lokálisan fogyó, a jobb oldaliban szigorúan lokálisan növekvő a függvény, így a minimumhelyre $c \in (x_1, x_2)$. Itt h differenciálható $\Rightarrow h'(c) = 0$. Azaz $h'(c) = f'(c) - \alpha = 0 \Rightarrow f'(c) = \alpha$.

Pl. Létezik-e olyan f függvény, amelynek deriváltja a $\text{sgn}(x)$?

4.25 Megjegyzés. A Darboux-tulajdonság szükséges feltétele annak, hogy valami deriváltfüggvény legyen. Létezik ennél enyhébb szükséges feltétel is. Emellett létezik számos elégséges feltétel is. De nem létezik szükséges és elégséges feltétel, és nem is adható meg ilyen (Cohen, 1970).

5. Fejezetek a Riemann-integrálszámításból

Korábbi tanulmányainkból ismert a primitív függvény fogalma, és a Riemann-integrál definiálása a Riemann-féle közelítő összegekkel. Láttuk, hogy ha $f, g \in R[a, b]$, akkor $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g \geq g_0 > 0$) is $R[a, b]$ -beli. De nincs képlet $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ integrálására! Ez utóbbi állítást a szorzatra meg is gondoljuk. Tegyük fel, hogy van olyan képlet, amely az $\int_a^b f \cdot g$ integrált megadja f és g integráljának függvényében, azaz létezik olyan Φ függvény, amelyre

$$\int_a^b f \cdot g = \Phi \left(\int_a^b f, \int_a^b g \right).$$

Legyen $[a, b] = [0, 1]$, és $f(x) = g(x) = 1$. Ekkor

$$\int_0^1 1 \cdot 1 dx = 1 = \Phi(1, 1).$$

Ugyanakkor, ha az $f(x) = g(x) = 2x$ függvényeket választjuk, $\int_0^1 2x dx = 1$ és $\int_0^1 2x \cdot 2x dx = \frac{4}{3}$, amiből

$$\frac{4}{3} = \Phi(1, 1)$$

következik, ami ellentmond $\Phi(1, 1) = 1$ -nek.

Emlékeztetünk arra az állításra is, hogy Riemann-integrálható függvények kompozíciója nem feltétlenül Riemann-integrálható.

5.1. Integrálhatósági tételek

1. Ha $f \in R[a, b]$, akkor $|f| \in R[a, b]$, és

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

5.1 Megjegyzés. A megfordítás nem igaz, hiszen pl. az $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$ abszolút értékben integrálható, de maga f nem integrálható.

2. Legyenek $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvények, $f \in R(I)$. Ha $f \neq g$ véges számú pontban I -n, akkor $g \in R(I)$, és $\int_I g = \int_I f$.

Biz.: Legyen $u(x) = g(x) - f(x)$. Ekkor $u(x) = 0$ véges számú pont kivételével. Legyenek ezek a pontok $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p \in I$. Vezessük be a

$$C : (\max\{|u(\tilde{x}_1)|, |u(\tilde{x}_2)|, \dots, |u(\tilde{x}_p)|\})$$

jelölést. Ekkor $\forall \tau \in \mathbb{F}(I)$ esetén ($\tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$), mivel egy $\tilde{x}_i$ pont legfeljebb két osztásrészhez tartozhat egyszerre,

$$|\sigma(u, \tau, \xi)| = \left| \sum_{i=1}^n u(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |u(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) \leq |\tau| \sum_{i=1}^n |u(\xi_i)| \leq 2pC|\tau|$$

Következésképpen,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta := \frac{\varepsilon}{2pC} : \forall \tau \in \mathbb{F}(I) : |\tau| < \delta \Rightarrow |\sigma(u, \tau, \xi) - 0| < \varepsilon,$$

azaz $\exists \lim \sigma = 0$. Tehát $u \in R(I)$, és $\int_I u = 0$. Ekkor viszont $g = u + f \in R(I)$, és

$$\int_I g = \int_I u + \int_I f = \int_I f.$$

5.2 Következmény. *Ha egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényt véges számú pontban megváltoztatunk, akkor ez az integrálhatóságon (ill. integrálhatóság esetén az integrál értékén) nem változtat.*

Kérdés: Mi történik, ha végtelen számú pontban változtatjuk meg a függvényt?

Legyen

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Ez az ún. Riemann-függvény. Megmutatható, hogy $R \in R[0, 1]$. A

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Dirichlet-függvény viszont nem integrálható. Tehát az integrálható $f(x) \equiv 0$ függvény megváltoztatása ugyanazon ponthalmazon mást eredményez. Ez azt is mutatja, hogy ha megszámlálható halmazon változtatjuk meg a függvényt, akkor általánosan nem mondható semmi. Csak az igaz, hogy ha $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \neq g$ megszámlálható pontban, továbbá $f, g \in R(I)$, akkor $\int_I f \neq \int_I g$. (Így tehát $\int_0^1 R(x)dx = 0$.)

5.2. Integrálható függvények

5.3 Állítás. *Ha $f \in C[a, b]$, akkor $f \in R[a, b]$, azaz minden $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény Riemann-integrálható.*

Biz.: A Heine-tétel szerint ha $f \in C[a, b]$, akkor f egyenletesen is folytonos $[a, b]$ -n, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x_1, x_2 \in I : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Legyen $\tau \in \mathbb{F}[a, b] : |\tau| < \delta$. Ekkor a Weierstrass-tételből következően

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\eta_i)) (x_i - x_{i-1}).$$

Mivel $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow |\xi_i - \eta_i| < |\tau| < \delta \Rightarrow |f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Így

$$\Omega(f, \tau) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

5.4 Állítás. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvény, akkor $f \in R[a, b]$.

Biz.: Segítség: Legyen $\tau \in \mathbb{F}[a, b] : |\tau| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

5.5 Állítás. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, amely csak véges számú pontban nem folytonos, akkor $f \in R[a, b]$.

Biz.:

1. Tegyük fel, hogy f csak egy pontban, az intervallum $x = a$ bal oldali végpontjában nem folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$, és jelölje

$$\omega := \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f.$$

Válasszuk meg az x_1 pontot úgy, hogy $x_1 - a < \frac{\varepsilon}{2\omega}$ legyen. Mivel f folytonos $[x_1, b]$ -n, ezért $f \in R[x_1, b]$. Tehát $\exists \tau_1 : \{x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ felosztás, amelyre

$$\Omega(f|_{[x_1, b]}, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jelölje τ a $\tau_1 \cup \{a\}$ felosztást. Ekkor

$$\Omega(f, \tau) = (\sup_{[a, x_1]} f - \inf_{[a, x_1]} f)(x_1 - a) + \Omega(f|_{[x_1, b]}, \tau_1) < \omega \cdot \frac{\varepsilon}{2\omega} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Így $f \in R[a, b]$ ebben a speciális esetben. (Ha b -ben van a szakadási pont, a bizonyítás hasonló.)

2. Tegyük fel, hogy f szakadási pontjai: $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_p$, és legyenek η_i olyanok, hogy

$$a < \eta_1 < \xi_1 < \eta_2 < \xi_2 < \eta_3 < \dots < \eta_p < \xi_p < \eta_{p+1} < b.$$

Ekkor az $[a, \eta_1], [\eta_1, \xi_1], [\xi_1, \eta_2], \dots, [\eta_{p+1}, b]$ intervallumokon f -nek legfeljebb egy szakadási pontja van, és azok az intervallumok végpontjaira esnek. $\Rightarrow f$ mindegyik intervallumon Riemann-integrálható, és ekkor az integrál tartomány szerinti additivitása miatt $[a, b]$ -n is.

Kérdés: Nem alkalmazható-e a folytonos függvény véges számú pontban való megváltoztatásáról szóló tétel? Általában nem, csak akkor, ha a szakadás megszüntethető. De az

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény nem tehető folytonossá, ugyanakkor ezen tétel alapján integrálható.

5.3. Integrál-középértéktételek

Megmutattuk, hogy $f, g \in R[a, b]$ esetén $f \cdot g \in R[a, b]$, de nem adható meg képlet $\int_a^b f \cdot g$ értékére. A továbbiakban becslést adunk meg erre.

5.6 Állítás. *Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a, b]$, $m \leq f \leq M$, és $g \geq 0$. Ekkor*

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int_a^b g. \quad (20)$$

Biz.: Nyilván $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \forall x \in [a, b]$. Az integrál monotonitásából következik az állítás.

5.7 Következmény. *A $g \equiv 1$ megválasztás esetén: ha $f \in R[a, b]$, akkor*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M.$$

5.8 Állítás. *Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$, $g \in R[a, b]$, és $g \geq 0$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$:*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g. \quad (21)$$

Biz.: Weierstrass tétele $\Rightarrow \exists x_*, x^* \in [a, b]$:

$$m = f(x_*) \text{ és } M = f(x^*). \quad (22)$$

1. Tegyük fel, hogy $\int_a^b g = 0$. Ekkor (20) $\Rightarrow \int_a^b fg = 0$, és (21) $\forall \xi$ -re igaz.
2. Tegyük fel, hogy $\int_a^b g > 0$. Ekkor (20) és (22) $\Rightarrow$

$$m = f(x_*) \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq f(x^*) = M. \quad (23)$$

Mivel f folytonos, így Darboux-tulajdonságú, azaz felveszi $f(x_*)$ és $f(x^*)$ közötti összes értéket. Így létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont, hogy

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$

5.9 Következmény. *Ha $g \equiv 1$, akkor $f \in C[a, b]$ esetén $\exists \xi \in (a, b)$:*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

Ezt integrál-közéértéktételnek nevezzük.

6. Integrál és mértékek

Emlékeztető: A Riemann-integrál fogalmát kiterjesztettük $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényekre. Először $\mathbb{R}^N$ -beli intervallumon értelmezett függvényekkel foglalkoztunk. $\mathbb{R}^N$ -beli (N dimenziós) intervallumon az

$$I := I^1 \times I^2 \times \dots \times I^N \subset \mathbb{R}^N$$

alakú halmazokat értjük, ahol

$$I^j = [a^j, b^j] \subset \mathbb{R}.$$

(Itt $a^j = b^j$ is lehet.) Jelölje $\mathcal{I}_0$ az összes $\mathbb{R}^N$ -beli intervallum halmazát, hozzávéve még elemként az üres halmazt is. Definiáltunk egy μ_0 -al jelölt függvényt, amely minden $\mathcal{I}_0$ -beli halmazhoz hozzárendel egy nemnegatív számot a következő szabály szerint:

$$\mu_0(I) = \begin{cases} 0, & \text{ha } I = \emptyset \\ \prod_{j=1}^N (b^j - a^j), & \text{ha } I \neq \emptyset. \end{cases}$$

A $\mu_0(I)$ számot az $I \subset \mathcal{I}_0$ intervallum mértékének neveztük. Azt mondjuk, hogy az $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_0$ halmazok μ_0 -diszjunktak, ha $\mu_0(I_1 \cap I_2) = 0$, vagyis ha I_1 és I_2 közös részének nulla a mértéke. (Ez nem csak úgy lehetséges, ha a két intervallumnak nincs közös pontja.) Ezután bevezettük az $\mathcal{I}$ jelölést azon $\mathbb{R}^N$ -beli halmazok összességére, amelyek előállnak véges számú $\mathcal{I}_0$ -beli halmaz uniójaként. Ha $I \in \mathcal{I}$, akkor I előállítható páronként μ_0 -diszjunkt $\mathcal{I}_0$ -beli halmazok uniójaként:

$$I = \cup_{j=1}^n I_j \quad I_k \in \mathcal{I}_0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ és } \mu_0(I_k \cap I_l) = 0, \quad k \neq l.$$

Legyen $\mu : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ a következő függvény:

$$I \in \mathcal{I}, I = \cup_{j=1}^n I_j, \mu(I) := \sum_{j=1}^n \mu_0(I_j).$$

Ennek segítségével bevezettük a Riemann-integrált $\mathcal{I}$ -n, majd tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^N$ korlátos halmazon. Tehát értelmeztük a $\int_H f$ integrált, ha $H \subset \mathbb{R}^N$ korlátos, és $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Beláttuk: ha $H \in \mathcal{I}$, és f folytonos H -n, akkor létezik $\int_H f$. Speciálisan, ha $f \equiv 1$, akkor $\int_H f = \mu(H)$. Tehát, ha $H \in \mathcal{I}$, akkor $\int_H 1$ a halmaz mértéke.

6.1 Definíció. Egy $Q \subset \mathbb{R}^N$ korlátos halmazt Jordan-mérhetőnek nevezünk, ha az $f \equiv 1$ függvény Riemann-integrálható Q -n, azaz $1 \in R(Q)$. A $\int_Q 1 \in \mathbb{R}$ számot a Q halmaz Jordan-mértékének nevezzük.

(Tehát ha $Q \in \mathcal{I}$, akkor a Jordan-mértéke $\mu(Q)$.)

6.2 Definíció. A $\chi_Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}; \chi_Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in Q \\ 0, & \text{ha } x \in I \setminus Q \end{cases}$ függvényt (ahol $I \supset Q$ tetszőleges, $I \in \mathcal{I}_0$) a Q halmaz karakterisztikus függvényének nevezzük.

Könnyen meggondolható a következő

6.3 Állítás. Q pontosan akkor Jordan-mérhető, ha $\chi_Q \in R(I)$.

Jelölje $\mathcal{J}$ a Jordan-mérhető halmazok összességét. $Q \in \mathcal{J}$ esetén a

$$\mu(Q) := \int_I \chi_Q = \int_Q 1$$

számot a Q halmaz Jordan-mértékének nevezzük.

6.4 Következmény. $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, és $Q \in \mathcal{J}$ esetén $\mu(Q) \geq 0$.

6.5 Megjegyzés. Tegyük fel, hogy $f \in R[a, b]$, $f \geq 0$. Jelölje $Q \subset \mathbb{R}^2$ a következő halmazt:

$$Q := \{(x, y), a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Ez az f „görbe alatti területe”. Ekkor

$$\mu(Q) = \int_Q 1 = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 1 dy \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Térfogat ugyanígy...

Kérdés: Van-e nem $\mathcal{J}$ -beli halmaz? Igen, pl.

$$Q_0 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \text{ és } x, y \text{ racionális számok}\}.$$

Ez a példa mutatja, hogy egy Jordan-mérhető halmaz részhalmaza nem feltétlenül Jordan-mérhető.

6.6 Definíció. Egy $Q \in \mathcal{J}$ halmazt Jordan-nullmértékű halmaznak nevezünk, ha $\mu(Q) = 0$.

A Jordan-nullmértékű halmazok összességét $\mathcal{J}_0$ jelöli.

Kérdés: Hogyan lehet felismerni egy $\mathcal{J}_0$ -beli halmazt?

Legyen $Q \subset \mathbb{R}^N$ egy tetszőleges korlátos, nemüres halmaz, $I \subset \mathcal{I}_0$ egy intervallum, $\tau \in \mathbb{F}(I)$ egy felosztása. Jelölés:

$$\tau(Q) := \{J \in \tau : Q \cap J \neq \emptyset\}.$$

(Tehát azon τ -beli elemek, amelyeknek van Q -val közös pontjuk.) Nyilván $\tau(Q) \subset \tau$, és $\tau(Q) = \emptyset \Leftrightarrow I \cap Q = \emptyset$. (Tehát ha $Q \subset I$, akkor $\tau(Q) \neq \emptyset$.)

6.7 Állítás. Q pontosan akkor Jordan-nullmértékű, ha befedhető véges számú, tetszőleges kicsi összmértékű Jordan-mérhető halmazokkal, azaz

$$Q \in \mathcal{J}_0 \Leftrightarrow \forall I \in \mathcal{J}_0 : I \supset Q \text{ és } \forall \varepsilon > 0 \exists \tau \in \mathbb{F}(I) : \sum_{J \in \tau(Q)} \mu(J) < \varepsilon.$$

(Biz. nélkül)

6.8 Következmény. Egy Jordan-nullmértékű halmaz részhalmaza is Jordan-nullmértékű, továbbá véges számú Jordan-nullmértékű halmazok uniója is Jordan-nullmértékű.

Pl.

- $Q_1 = \{x_i, i = 1, 2, \dots, n\} \subset [a, b] \in \mathcal{J}_0$
- $Q_2 = \{x_i = \frac{1}{i}, i = 1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{J}_0$
(Ugyanis legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor a $(0, \frac{\varepsilon}{2})$ intervallumon kívül csak véges számú pont van. Legyen ezek száma M . Mindegyiket lefedjük $\frac{\varepsilon}{2M}$ hosszúságúval.
 $\Rightarrow$ A teljes halmaz lefedhető $\frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$ összhosszúságú intervallumokkal.)
- $Q_3 = Q_{\text{rac}}[0, 1]$. Mivel $\chi_{Q_3}(x) = D(x)$, így $Q_3 \notin \mathcal{J}_0$. (Érdekesség: Q_3 pontjainak a számossága egyenlő Q_2 pontjainak a számosságával.)
- $Q_4 = \{(x, D(x)), x \in [0, 1]\}$ (a Dirichlet-függvény gráfja, $\mathbb{R}^2$ -beli halmaz!)
Legyen $I_0 := \{(x, 0) : x \in [0, 1]\}$, $I_1 := \{(x, 1), x \in [0, 1]\}$. Ekkor $Q_4 \subset I_0 \cup I_1$,
 $I_0, I_1 \in \mathcal{J}_0 \Rightarrow I_0 \cup I_1 \in \mathcal{J}_0 \Rightarrow Q_4 \in \mathcal{J}_0$.

6.9 Állítás. Egy korlátos $Q \in \mathbb{R}^N$ halmaz pontosan akkor Jordan-mérhető, ha a határpontjainak a halmaza Jordan-nullmértékű, azaz $\partial Q \in \mathcal{J}_0$.

6.10 Következmény. Legyen $f \in R[a, b]$, $f \geq 0$. Ekkor a

$$Q := \{(x, y), a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmaz Jordan-mérhető. (Beláttuk, hogy $\mu(Q) = \int_a^b f(x)dx$) $\Rightarrow \partial Q \in \mathcal{J}_0$. Mivel $\text{graf } f := \{(x, f(x)), x \in [a, b]\} \subset \partial Q$, ezért $\text{graf } f \in \mathcal{J}_0$. Tehát minden $R[a, b]$ -beli függvény (így minden $C[a, b]$ -beli) gráfja Jordan-nullmértékű.

6.11 Következmény. Minden $\mathbb{R}$ -beli korlátos intervallum Jordan-mérhető, ugyanis a határpontok halmaza két pontból áll, és így Jordan-nullmértékű.

6.12 Következmény. Ha $Q_1, Q_2 \in \mathcal{J}$, akkor $Q_1 \cup Q_2, Q_1 \cap Q_2, Q_1 \setminus Q_2 \in \mathcal{J}$. (Ugyanis $\partial(Q_1 \cup Q_2) \subset \partial Q_1 \cup \partial Q_2$ stb.)

6.13 Állítás. Ha $Q_1, Q_2 \in \mathcal{J}$, akkor $\mu(Q_1 \cup Q_2) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2) - \mu(Q_1 \cap Q_2)$.

Biz.: $\chi_{Q_1 \cup Q_2}(x) = \chi_{Q_1}(x) + \chi_{Q_2}(x) - \chi_{Q_1 \cap Q_2}(x)$

6.14 Következmény. (A Jordan-mérték additivitása.)

Minden $Q_1, Q_2 \in \mathcal{J}$ esetén

$$\mu(Q_1 \cup Q_2) \leq \mu(Q_1) + \mu(Q_2)$$

és

$$\mu(Q_1 \cup Q_2) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2) \Leftrightarrow \mu(Q_1 \cap Q_2) = 0.$$

6.15 Következmény. (A Jordan-mérték monotonitása.)

Ha $Q_1, Q_2 \in \mathcal{J}$, és $Q_1 \subset Q_2$, akkor $\mu(Q_1) \leq \mu(Q_2)$.

Biz.: Következik abból, hogy $\chi_{Q_1}(x) \leq \chi_{Q_2}(x)$, és az integrál monotonitásából.

6.16 Állítás. Ha $Q_1, Q_2 \in \mathcal{J}$, és $Q_1 \subset Q_2$, akkor $\mu(Q_2 \setminus Q_1) = \mu(Q_2) - \mu(Q_1)$.

Biz.: $Q_2 = Q_1 \cup (Q_2 \setminus Q_1) \Rightarrow \mu(Q_2) = \mu(Q_1) + \mu(Q_2 \setminus Q_1)$.

6.1. Riemann-féle integrálhatóság

6.17 Állítás. Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}^N$ korlátos, $I \subset \mathcal{I}_0$, és jelölje Q az f függvény szakadási pontjainak a halmazát. Ha Q Jordan-nullmértékű, akkor f Riemann-integrálható I -n.

Biz.: Belátandó: $\mu(Q) = 0$ esetén $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \in \mathbb{F}(I) : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$.

Legyen $\omega_f := \sup_I f - \inf_I f$. Mivel $Q \in \mathcal{J}_0$, így Q -nak létezik véges számú, $\frac{\varepsilon}{2\omega_f}$ -nél kisebb összmértékű befedése, azaz olyan $J_1^*, J_2^*, \dots, J_m^* \in \mathcal{J}$ halmazok, amelyekre

$$Q \subset \cup_{k=1}^m J_k^*, \text{ és } \sum_{k=1}^m \mu(J_k^*) < \frac{\varepsilon}{2\omega_f}.$$

Mivel f az $I \setminus \cup_{k=1}^m J_k^*$ halmazon folytonos, ezért integrálható is $\Rightarrow$

$$\exists \tau^* = \{J_1, J_2, \dots, J_n\} \in \mathbb{IF}(I \setminus \cup_{k=1}^m J_k^*) : \Omega(f|_{I \setminus \cup_{k=1}^m J_k^*}, \tau^*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $\tau = \tau^* \cup \{J_1^*, J_2^*, \dots, J_m^*\} \in \mathbb{IF}(I)$, és

$$\Omega(f, \tau) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^m \omega_f \cdot \mu(J_k^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \omega_f \cdot \frac{\varepsilon}{2\omega_f} = \varepsilon.$$

Igaz-e a megfordítás?

Tekintsük az R Riemann-függvényt! Megmutatható, hogy $R \in R[0, 1]$, de minden racionális pontban szakad (és minden irracionális pontban folytonos). Így $Q = Q_{\text{rac}}[0, 1] \notin \mathcal{J}_0$. Tehát nem igaz a megfordítás, így $Q \in \mathcal{J}_0$ a Riemann-integrálhatóság elégséges (de nem szükséges) feltétele.

Kérdés: Van-e kapcsolat egy $H \subset \mathbb{R}$ ponthalmaz Jordan-mérhetősége ill. a halmaz pontjainak számossága között?

Beláttuk:

1. Ha H véges számú pontból áll, akkor $H \in \mathcal{J}_0$.
2. Ha H megszámlálhatóan végtelen számú pontból áll, akkor lehet $\mathcal{J}_0$ -beli ($H := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$), és lehet nem Jordan-mérhető ($H = Q_{\text{rac}}[0, 1]$).

Kérdés: Létezik-e kontinuum-számosságú $\mathcal{J}_0$ -beli halmaz? (A $\mathcal{J}$ -beliség nem kérdés: minden intervallum jó. De szét tudunk-e úgy „mázolni” kontinuum-számosságú pontot, hogy az mérhető legyen, és a mértéke nulla legyen?)

Konstruáljuk meg a következő halmazt:

1. Tekintsük a $[0, 1]$ intervallumot.
2. Vegyük ki belőle az $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyílt intervallumot.
3. A maradékok középső harmadát is vegyük ki.
4. Folytassuk az eljárást $n \rightarrow \infty$ esetre.

Jelölje C_n az n -edik lépés után megmaradt pontok halmazát, C pedig az $n \rightarrow \infty$ esetén megmaradt pontokat.

6.18 Definíció. A $C \subset [0, 1]$ halmazt Cantor-féle számhalmaznak nevezzük.

A C halmaz tulajdonságai:

6.19 Állítás. C zárt.

Biz.: Az eljárás során zárt halmazból mindig nyíltat hagyunk el. $\Rightarrow C_n$ mindig zárt.

6.20 Állítás. C minden pontja torlódási pont.

Biz.: Belátandó: $\forall x \in C$ ponthoz $\exists (x_n) \subset C$ sorozat, amelyre $x_n \rightarrow x$ ($x_n \neq x$).

Legyen $x \in C$, és írjuk fel ezt a számot hármasszámrendszerben:

$$x = [0, a_1 a_2 a_3 \dots]_3, \text{ ahol } a_i \in \{0, 1, 2\} \quad (24)$$

Tehát

$$x = a_1 \cdot \frac{1}{3} + a_2 \cdot \frac{1}{3^2} + a_3 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots$$

(Bizonyos számok, az ún. triadikus racionális számok kétféleképpen is felírhatók, pl. ilyen az

$$\frac{1}{3} = [0, 10000 \dots]_3 = [0, 02222 \dots]_3.$$

De csak ezek írhatók fel kétféleképpen!)

A (24) előállításban ha $a_1 = 1$, akkor $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Míg ezen intervallum belső pontjaira $a_1 = 1$ szükségszerűen, addig a végpontokra (mivel triadikus törtek) létezik egy másik felírás:

$$\frac{1}{3} = [0, 02222 \dots]_3, \quad \frac{2}{3} = [0, 20000 \dots]_3$$

Ezért az első lépés után (C_1 -ben) csak olyan számok lesznek, amelyeknek (24) előállításában $a_1 \neq 1$. Tehát

$$x \in C_1 \Leftrightarrow a_1 \in \{0, 2\}.$$

Hasonló megfontolással:

$$x \in C_n \Leftrightarrow a_i \in \{0, 2\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Jelölje most x_n azt a számot, amelynek triadikus alakja x triadikus alakjától csak az n -edik számjegyben különbözik, azaz, ha $x = [0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} \dots]_3$, akkor

$$x_n := [0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n a_{n+1} \dots]_3,$$

ahol

$$b_n = \begin{cases} 2, & \text{ha } a_n = 0; \\ 0, & \text{ha } a_n = 2. \end{cases}$$

Ekkor

1. $x \neq x_n$;
2. $x_n \in C$;

$$3. |x - x_n| = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \lim x_n = x.$$

6.21 Állítás. *A C halmaz kontinuum-számoságú.*

Biz.: Megmutattuk:

$$x \in C \Leftrightarrow x = [0, a_1 a_2 a_3 \dots]_3 \text{ előállításban } a_i \in \{0, 2\}.$$

Rendeljük hozzá az x számhoz a $[0, 1]$ intervallum egy pontját a következő szabály szerint:

$$x \mapsto y := [0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots]_2, \text{ ahol } b_n = \frac{a_n}{2}.$$

$$\text{Pl. } x = [0, 200200020 \dots]_3 \mapsto y = [0, 100100010 \dots]_2.$$

Ennek a leképezésnek létezik inverze is, azaz $\forall y \in [0, 1]$ ponthoz hozzárendelhető egy C -beli szám is:

$$y = [0, b_1 b_2 \dots b_n \dots]_2 \mapsto x = [0, (2b_1)(2b_2) \dots]_3 \in C.$$

Ha ez a leképezés injektív volna, akkor már be is láttuk volna a tételt, de nem az: bizonyos típusú C -beli számokhoz ugyanazt a $[0, 1]$ -beli számot rendeli:

$$x_1 = [0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 200 \dots]_3 \mapsto [0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \dots \frac{a_{n-1}}{2} 100 \dots]_2$$

$$x_2 = [0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} 022 \dots]_3 \mapsto [0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \dots \frac{a_{n-1}}{2} 100 \dots]_2,$$

és a jobb oldalak egyenlők! vegyük ki C -ből az ilyen számokat! Ekkor $[0, 1]$ és C egy részhalmaza között bijekció van $\Rightarrow C$ ezen részhalmaza kontinuum-számoságú. Ezért C számosága $\geq$ kontinuum. De $C \subset [0, 1]$, és $[0, 1]$ kontinuum-számoságú, így C számosága sem lehet nagyobb.

6.22 Állítás. *C Jordan-nullmértékű halmaz.*

Biz.: Belátandó: C befedhető tetszőleges ε -nál kisebb összmértékű véges számú intervallummal.

Ehhez számítsuk ki, hogy az n -edik lépésig milyen összhosszúságú intervallumokat hagyunk el!

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Így C_n (amely 2^n darab intervallumból áll)

$$1 - \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

összhosszúságú.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszuk n -t olyan nagynak, hogy $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$ legyen. Fedjük le mindegyik kis intervallumot C_n -ben (ezek száma 2^n) $\frac{\varepsilon}{2^n}$ átmérőjű intervallumokkal. Ezek összhossza $< \varepsilon$, és lefedik C_n -t. Mivel $C \subset C_n$, ezért ez jó lefedése lesz C -nek. Így $C \in \mathcal{J}_0$.

6.2. Lebesgue-féle nullmértékű halmaz

6.23 Definíció. Egy $Q \subset \mathbb{R}^N$ korlátos halmazt Lebesgue-féle nullmértékű halmaznak nevezünk, ha befedhető véges vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú, tetszőleges ε -nál kisebb összmértékű Jordan-mérhető halmazokkal. Jelölés: Λ_0 .

Nyilvánvalóan, minden Jordan-nullmértékű halmaz Lebesgue-nullmértékű, vagyis $\mathcal{J}_0 \subset \Lambda_0$.

Pl. $Q_{\text{rac}}[0, 1] \in \Lambda_0$, ugyanis az első pontot fedjük be $\frac{\varepsilon}{2}$, a másodikat $\frac{\varepsilon}{2^2}$, a harmadikat $\frac{\varepsilon}{2^3}$ és í. t. átmérőjű intervallumokkal. Ezek összhosszúsága $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

6.24 Állítás. Ha $Q_j \in \Lambda_0 (j = 1, 2, \dots)$, akkor $\cup_{j=1}^{\infty} Q_j \in \Lambda_0$, azaz megszámlálhatóan végtelen számosságú Lebesgue-nullmértékű halmazok uniója is Lebesgue-nullmértékű.

A továbbiakban megállapodás szerint ha valamely állítás egy Λ_0 -beli halmazon kívül mindenütt érvényes, akkor a „majdnem mindenütt” (m.m.) kifejezést használjuk.

Pl. „A Dirichlet-függvény m.m. nulla.” Vagy: „A sgn függvény m.m. deriválható.”

Ezek után már megfogalmazhatjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy függvény Riemann-integrálható legyen:

6.25 Tétel. $f \in R(I) \Leftrightarrow Q \in \Lambda_0$, vagyis egy f függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha a szakadási pontjainak Q halmaza Lebesgue-nullmértékű. (Biz. nélkül)

7. A Lebesgue-féle integrál

Probléma a Riemann-integrállal: sok függvény nem Riemann-integrálható. Szeretnénk ezért kiterjeszteni az integrál fogalmát. A következő kiterjesztés Lebesgue (1902) és Riesz (1903) munkáján alapszik.

7.1. Lépcsős függvények és sorozataik

7.1 Definíció. Egy $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ((a, b) $\mathbb{R}$ -beli korlátos intervallum) függvényt lépcsős függvénynek nevezünk, ha $\exists \tau \in \mathbb{F}[a, b]$, $\tau := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, és olyan $c_1, c_2, \dots, c_n$ állandók, amelyekre $\phi|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k$ $k = 1, 2, \dots, n$.

(Tehát az $x = x_k$ pontokban ϕ tetszőleges lehet!) Jelölés: $\phi \in S(a, b)$.

7.2 Állítás. Ha $\phi \in S(a, b)$, akkor $\phi \in R[a, b]$, és

$$\int_a^b \phi = \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}).$$

7.3 Lemma Legyen $(\phi_n) \subset S(a, b)$ olyan, hogy

- (ϕ_n) monoton csökkenő;
- $\lim \phi_n(x) = 0$ m.m. $x \in (a, b)$

Ekkor $\int_a^b \phi_n(x) dx \rightarrow 0$.

7.4 Lemma Legyen $(\phi_n) \subset S(a, b)$ olyan, hogy

- $\phi_n \geq 0$;
- (ϕ_n) monoton csökkenő;
- $\int_a^b \phi_n(x) dx \rightarrow 0$

Ekkor $\lim \phi_n(x) = 0$ m.m. $x \in (a, b)$.

Kérdés: Mi a kapcsolat a Riemann-integrál és a lépcsős függvények között?

Tegyük fel, hogy $f \in R[a, b]$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \in \mathbb{F}[a, b] : S(f, \tau) - s(f, \tau) < \varepsilon$. Itt

$$S(f, \tau) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}), \quad s(f, \tau) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}),$$

ahol

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

Továbbá,

$$s(f, \tau) \leq S(f, \tau) \tag{25}$$

Vegyük észre, hogy minden $\tau \in \mathbb{F}[a, b]$ felosztásnak megfeleltethető egy lépcsős függvény:

$$\Phi_\tau(x) := M_i, \text{ és } \phi_\tau(x) := m_i, \quad x \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, n. \tag{26}$$

Könnyen látható, hogy

1. $\int_a^b \Phi_\tau(x) dx = S(f, \tau); \int_a^b \phi_\tau(x) dx = s(f, \tau).$
2. Ha $\tau_1 \subset \tau_2$ (τ_1 pontjai benne vannak τ_2 -ben):

$$\Phi_{\tau_1}(x) \geq \Phi_{\tau_2}(x) \geq \phi_{\tau_2}(x) \geq \phi_{\tau_1}(x),$$

és

$$\int_a^b \Phi_{\tau_1} \geq \int_a^b \Phi_{\tau_2} \geq \int_a^b \phi_{\tau_2} \geq \int_a^b \phi_{\tau_1}.$$

Legyen $\tau_n^* \in \mathbb{F}[a, b]$ olyan felosztássorozat, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, \tau_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, \tau_n^*) = \int_a^b f$$

Pl. $\tau_n^* = \text{ekv}_n$, azaz egyenlőközű felosztás. Ekkor a $\tau_n := \cup_{k=1}^n \tau_k^*$ felosztásokra:

1. $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \dots \subset \tau_n \subset \dots$
- 2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, \tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, \tau_n) = \int_a^b f. \quad (27)$$

Jelölje $\Phi_n := \Phi_{\tau_n}$, $\phi_n := \phi_{\tau_n}$. Ekkor

- (Φ_n) monoton csökkenő, (ϕ_n) pedig monoton növekvő lépcsősfüggvény-sorozat.
- Mivel $s(f, \tau_n) = \int_a^b \phi_n$ és $S(f, \tau_n) = \int_a^b \Phi_n$, ezért (27) $\Rightarrow$

$$\lim \int_a^b \phi_n = \lim \int_a^b \Phi_n = \int_a^b f \quad (28)$$

Tehát $(\Phi_n - \phi_n) \in S(a, b)$, amelyre

- $\Phi_n - \phi_n \geq 0$;
- $(\Phi_n - \phi_n)$ monoton csökkenő;
- $\int_a^b (\Phi_n - \phi_n) dx \rightarrow 0$.

Ekkor a 7.4 Lemma alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi_n(x) - \phi_n(x)) = 0 \text{ m.m. } x \in [a, b]. \quad (29)$$

Mivel $\phi_n(x) \leq f(x) \leq \Phi_n(x)$ m.m. $x \in (a, b)$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = f(x) \text{ m.m. } x \in [a, b].$$

Összefoglalva: Ha $f \in R[a, b]$, akkor $\exists(\phi_n) \subset S(a, b)$ monoton növekvő és $\exists(\Phi_n) \subset S(a, b)$ monoton csökkenő lépcsősfüggvény-sorozat, amely m.m. tart f -hez, és amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n = \int_a^b f \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi_n = \int_a^b f \right)$$

7.2. Az $L^+(a, b)$ integrál

7.5 Definíció. $L^+(a, b)$ jelöli azon $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmazát, amelyekhez $\exists(\phi_n) \subset S(a, b)$, amelyre

- (ϕ_n) monoton növekvő;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = f(x)$ m.m. $x \in (a, b)$;
- $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n < +\infty$.

(Nyilván $R[a, b] \subset L^+(a, b)$). A $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n \in \mathbb{R}$ számot az f függvény L^+ -beli integráljának nevezzük. Jelölés: $\int_a^b f d\lambda_+ := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n$.

(Megmutatható, hogy az előbbi határérték független a (ϕ_n) megválasztásától.

Tehát, ha $f \in R[a, b]$, akkor $f \in L^+(a, b)$, és $\int_a^b f d\lambda_+ = \int_a^b f(x) dx$.

Az $L^+(a, b)$ tulajdonságai:

1. $f, g \in L^+(a, b)$ és $\mu \geq 0$

- $f + g \in L^+(a, b)$ és $\int_a^b (f + g) d\lambda_+ = \int_a^b f d\lambda_+ + \int_a^b g d\lambda_+$;
- $\mu f \in L^+(a, b)$ és $\int_a^b \mu f d\lambda_+ = \mu \int_a^b f d\lambda_+$.

2. $\forall c \in (a, b) : \int_a^b f d\lambda_+ = \int_a^c f d\lambda_+ + \int_c^b f d\lambda_+$.

3. Ha $f \in L^+(a, b)$ és $f \geq 0$ m.m. $x \in (a, b)$, akkor $\int_a^b f d\lambda_+ \geq 0$.

4. Ha $f, g \in L^+(a, b)$ és $f \geq g$ m.m., akkor $\int_a^b f d\lambda_+ \geq \int_a^b g d\lambda_+$.

Pl. Legyen $f(x) = D(x)$. Ekkor a $\phi_n(x) \equiv 0$ lépcsősfüggvény-sorozat jó lesz. Ezért $D \in L^+(0, 1)$, és $\int_0^1 D d\lambda_+ = 0$.

Probléma: ha $f, g \in L^+(a, b)$, akkor $f - g$ nem feltétlenül van $L^+(a, b)$ -ben. Így tehát $L^+(a, b)$ nem vektortér!

A továbbiakban kiterjesztjük az $L^+(a, b)$ integrált.

7.3. Az $L(a,b)$ tér

7.6 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lebesgue-értelemben integrálható, ha előállítható

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad (30)$$

alakban, ahol $f_1, f_2 \in L^+(a,b)$. Jelölés: $L(a,b)$.

Nyilvánvalóan, $L^+(a,b) \subset L(a,b)$.

7.7 Definíció. Egy $f \in L(a,b)$ függvény Lebesgue-féle integráljának az

$$\int_a^b f d\lambda := \int_a^b f_1 d\lambda_+ - \int_a^b f_2 d\lambda_+ \quad (31)$$

számot nevezzük.

7.8 Megjegyzés. A (31) definíció csak akkor korrekt, ha megmutatjuk, hogy $\int_a^b f d\lambda$ értéke független f_1 és f_2 megválasztásától! Ez igaz, ugyanis tegyük fel, hogy $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ ($f_i, g_i \in L^+(a,b)$). Ekkor $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$, és mindkét oldal $L^+(a,b)$ -beli. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1 d\lambda_+ + \int_a^b g_2 d\lambda_+ &= \int_a^b g_1 d\lambda_+ + \int_a^b f_2 d\lambda_+ \Rightarrow \\ \int_a^b f_1 d\lambda_+ - \int_a^b f_2 d\lambda_+ &= \int_a^b g_1 d\lambda_+ - \int_a^b g_2 d\lambda_+. \end{aligned}$$

7.9 Állítás. $L(a,b)$ vektortér, és az integrálás lineárisan működik.

1. $f, g \in L(a,b) \Rightarrow f = f_1 - f_2, g = g_1 - g_2$ és $f_i, g_i \in L^+(a,b)$. Ekkor

$$f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2).$$

Így $f + g \in L(a,b)$. Emellett

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) d\lambda &= \int_a^b (f_1 + g_1) d\lambda_+ - \int_a^b (f_2 + g_2) d\lambda_+ = \\ &= \left(\int_a^b f_1 d\lambda_+ - \int_a^b f_2 d\lambda_+ \right) + \left(\int_a^b g_1 d\lambda_+ - \int_a^b g_2 d\lambda_+ \right) = \int_a^b f d\lambda - \int_a^b g d\lambda. \end{aligned}$$

2. Tegyük fel, hogy $f = f_1 - f_2 \in L(a,b)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- Ha $\mu \geq 0$, akkor $\mu f = \mu f_1 - \mu f_2 \Rightarrow \mu f \in L(a, b)$, és

$$\int_a^b \mu f d\lambda = \int_a^b \mu f_1 d\lambda_+ - \int_a^b \mu f_2 d\lambda_+ = \mu \left(\int_a^b f_1 d\lambda_+ - \int_a^b f_2 d\lambda_+ \right) = \mu \int_a^b f d\lambda.$$

- Ha $\mu \leq 0$, akkor $\mu f = (-\mu)(f_2 - f_1) = [(-\mu)f_2] - [(-\mu)f_1] \Rightarrow \mu f \in L(a, b)$, és

$$\begin{aligned} \int_a^b \mu f d\lambda &= \int_a^b (-\mu)f_2 d\lambda_+ - \int_a^b (-\mu)f_1 d\lambda_+ = -\mu \int_a^b f_2 d\lambda_+ - (-\mu) \int_a^b f_1 d\lambda_+ = \\ &= \mu \int_a^b f_1 d\lambda_+ - \mu \int_a^b f_2 d\lambda_+ = \mu \int_a^b f d\lambda. \end{aligned}$$

- Emellett $L(a, b)$ minden más tulajdonsággal is rendelkezik.

7.4. Lebesgue-mérhető halmazok

7.10 Definíció. Egy $Q \subset \mathbb{R}$ halmazt Lebesgue-mérhetőnek nevezünk, ha $\chi_Q \in L(a, b)$ ($Q \subset (a, b)$). Az $\int_a^b \chi_Q d\lambda \in \mathbb{R}$ számot a Q halmaz Lebesgue-mértékének nevezzük.

A Lebesgue-mérhető halmazok összességét Λ , egy Q halmaz Lebesgue-mértékét pedig $\lambda(Q)$ jelöli.