

Mat2 gyakorlófeladatok 1.
Számsorozatok

1. Határozzunk meg olyan N küszöbindexet, amelyet elérve és túllépve az alábbi sorozatok elemei $\varepsilon = 10^{-2}$ -nél kisebb mértékben térnek el a határértéküktől!

$$a) \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 \qquad b) \frac{n-1}{n+2}$$

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, ha létezik!

- a.) $a_n = \sqrt[n]{n^3 + 8}$
- b.) $a_n = \left(10 + \frac{1}{n}\right)^n$
- c.) $a_n = \frac{5n+n^3-6n^2}{2n^3+1000}$
- d.) $a_n = \frac{10000n}{n^2+1}$
- e.) $a_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}$
- f.) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}$
- g.) $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- h.) $a_n = n^3 - n$

Megoldások:

1. a) A sorozat nullához tart.

$$\left| \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 - 0 \right| < 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow n > 19$$

Így küszöbindexnek választható $N = 20$.

- b) A sorozat 1-hez tart (összük el a számlálót és a nevezőt is n -nel). $N = 299$.

2. a.) A rendőrelv értelmében $\rightarrow 1$, ugyanis

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^3 + 8} \leq \sqrt[n]{n^3 + n^3} = \sqrt[n]{2n^3} = \sqrt[n]{2} \cdot (\sqrt[n]{n})^3,$$

ha $n \geq 2$, és a bal és jobb oldali sorozat is 1-hez tart.

- b.) $\rightarrow +\infty$, mivel

$$\left(10 + \frac{1}{n}\right)^n > 10^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

és a jobb oldali sorozat $\rightarrow +\infty$.

- c.) $\rightarrow \frac{1}{2}$ (összük el a számlálót és a nevezőt is n^3 -nal...)

- d.) $\rightarrow 0$ (összük el a számlálót és a nevezőt is n^2 -tel...)

e.) $\rightarrow e^{\frac{2}{3}}$, mivel

$$\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{n}\right)^n\right)^2 \rightarrow (e^{\frac{1}{3}})^2.$$

f.) Rendőrelv:

$$0 \leq \left| \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} \right| \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{n^{-\frac{1}{3}}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 0.$$

Így a közrefogott a_n sorozat is nullához tart.

g.) Nemnegatív x értékekre a $\sin$ függvény grafikonja az identitásfüggvény grafikonja alatt halad, és $x \in [0, 1]$ esetén $\sin(x) \geq 0$, ezért

$$0 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

A rendőrelv értelmében $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$.

h.) Ez két $+\infty$ -hez tartó sorozat különbsége. A $\infty - \infty$ esetről általánosan nem mondhatunk semmit, ezért átalakítjuk: $n^3 - n = n(n^2 - 1)$. Az utóbbi két $+\infty$ -hez tartó sorozat szorzatsorozata, és $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, így az a_n sorozat $+\infty$ -hez tart.