

Mat2 gyakorlófeladatok 2.

Számsorok

1. Konvergens vagy divergens-e a következő számsor?

$$\begin{aligned} a.) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{10n^2 + 1} \quad & b.) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} \quad & c.) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n!} \quad & d.) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n} \\ e.) \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n+1} \quad & f.) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \quad & g.) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \quad & h.) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^3 + 3} \\ i.) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+10}{3n-2} \right)^n \end{aligned}$$

Megoldások:

1. a.) Divergens, mert az általános tagja nem tart nullához:

$$\frac{n^2}{10n^2 + 1} = \frac{1}{10 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 0.1 \neq 0$$

b.) $n \geq 2$ -re $n > \ln n$, így $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Az összehasonlító kritérium alapján, mivel $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergens (összege $+\infty$), így $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ is divergens (összege $+\infty$).

c.) A hányadoskritérium alapján

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{((n+1)^2 + 1)n!}{(n^2 + 1)(n+1)!} = \frac{n^2 + 2n + 2}{n^3 + n^2 + n + 1} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \rightarrow 0 < 1$$

$\Rightarrow$ a sor konvergens.

d.) A gyökkritérium alapján

$$\sqrt[n]{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{1}{3} (\sqrt[n]{n})^4 \rightarrow \frac{1}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ a sor konvergens.

e.) Divergens, mert $\sqrt[n]{n+1} \rightarrow 1 \neq 0$.

f.) Az összehasonlító kritérium alapján, mivel

$$\frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{n^2},$$

és a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, így a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ sor is konvergens.

g.) Ez egy $q = \frac{1}{10}$ hányadosú mértani sor. Mivel $q \in (-1, 1)$, így a sor konvergens,

és összege a mértan sor összegképlete alapján $\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$.

h.) Az összehasonlító kritérium alapján, mivel

$$\frac{n-1}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2},$$

és a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, így a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ sor is konvergens.

i.) A gyökkritérium alapján

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+10}{3n-2}\right)^n} = \frac{n+10}{3n-2} = \frac{1+\frac{10}{n}}{3-\frac{2}{n}} \rightarrow \frac{1}{3} < 1,$$

így konvergens a sor.