

Mat2 gyakorlófeladatok 3.
Lineáris leképezések

1. Melyik lineáris az alábbi függvények közül?

- a.) $f(x) = 3x + 5$ b.) $f(x) = 3$ c.) $f(x) = 0$ d.) $f(x) = x^2$
e.) $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ f.) $f(x_1, x_2) = (5x_2, x_1)$ g.) $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1x_2^2)$
h.) $f(x_1, x_2) = 5$

2. Milyen lineáris leképezést határoznak meg a következő mátrixok?

$$\begin{array}{lll} \text{a.) } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & \text{b.) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{c.) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{d.) } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{e.) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{f.) } \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Lineáris-e az az $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés, amely minden számpárhoz az origóra vett tükörképét rendeli hozzá?
4. Egy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés az $(1, 2)$ vektorhoz a $(3, 8)$ vektort, a $(3, 1)$ -hez a $(4, 14)$ -et rendeli hozzá. Írjuk fel a mátrixát!
5. Legyenek adva a következő mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1], \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Mely mátrixkifejezések léteznek az alábbiak közül, és mennyi az értékük?

- a.) $A \cdot D$ b.) $A^2 + A$ c.) $B^2 - 2B$ d.) $C + D^T$ e.) $A^T A + CC^T$ f.) $BB^T + C$

6. Igaz-e, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor $A \cdot B = B \cdot A$? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, mondjunk ellenpéldát!
7. Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixokra $AB = BA$, akkor azt mondjuk, hogy A és B kommutál. Mondjunk példát kommutáló mátrixokra! Mondjunk példát olyan mátrixra is, amelyik minden más (vele azonos méretű) mátrixszal kommutál.
8. Igaz-e, hogy ha az A és B mátrixok szorzata nullmátrix (azaz minden eleme nulla), akkor A és B közül legalább az egyik is nullmátrix?
9. Legyen A egy négyzetes mátrix. Igaz-e, hogy ha $A^2 = 0$, akkor $A = 0$?

10. Mely összefüggések igazak tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok esetén? Az igazakat bizonyítsuk be, a hamisakra keressünk ellenpéldát!
- a.) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 b.) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
 c.) $A^2 - I = (A - I)(A + I)$, ahol I az $n \times n$ -es identitásmátrix
11. Számítsuk ki az alábbi mátrixhatványt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n,$$

ahol n tetszőleges természetes szám.

Megoldások:

1. c.), f.)
2. a.) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2)$
 b.) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ (minden számpárt helybenhagy)
 c.) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (0, 0)$ (minden számpárhoz a $(0, 0)$ -t rendeli)
 d.) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (-x, 0, x)$
 e.) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2)$ (megcseréli minden számhármas második és harmadik elemét)
 f.) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (-5x_1 + 3x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 + 4x_2)$
3. Igen, hiszen két tetszőleges vektor összegének tükörképe a tükörképeik összege, és egy tetszőleges vektor adott számszorosának tükörképe a tükörkép számszorosa. Másképpen: ez a leképezés a következő függvényt jelenti: $f(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$, amely lineáris.

4. Azt az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

mátrixot keressük, amelyre

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Végezzük el a bal oldali mátrixszorzásokat az egyelőre ismeretlen mátrixszal. Így a következő egyenletrendszerekhez jutunk:

$$\begin{array}{lcl} 1 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{12} = 3 & \text{és} & 3 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} = 4 \\ 1 \cdot a_{21} + 2 \cdot a_{22} = 8 & & 3 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} = 14 \end{array}$$

Ezt a négy egyenletet a négy ismeretlen mátrixelemre megoldva kapjuk: $a_{11} = 1, a_{12} =$

1, $a_{21} = 4, a_{22} = 2$. Így a keresett mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

5. a.) $\begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix}$ b.) $\begin{bmatrix} 31 & 38 & 45 \\ 70 & 86 & 102 \\ 109 & 134 & 159 \end{bmatrix}$ c.) $\nexists$ d.) $[2 \ 0 \ 5]$ e.) $\nexists$ f.) $\nexists$

6. Nem igaz, ugyanis pl. legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. A mátrixok szorzása tehát nem kommutatív művelet.

7. Pl. az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixok kommutálnak. Minden mátrix kommutál pl. a vele azonos méretű identitásmátrixszal és nullmátrixszal.

8. Nem igaz, mert pl. az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixok közül egyik sem nulla, a szorzatuk mégis a 2×2 -es nullmátrix.

9. Nem, legyen pl. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10. a.) Fejtsük ki a bal oldali kifejezést:

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + B \cdot A + A \cdot B + B \cdot B$$

A jobb oldali első tag A^2 , az utolsó B^2 . A kérdés tehát már csak az: vajon bármely két négyzetes mátrixra igaz-e, hogy $2AB = AB + BA$, azaz $AB = BA$? Nem, mert láttuk, hogy a szorzás nem kommutatív a mátrixok körében. Természetesen kommutáló mátrixokra igaz az összefüggés.

b.) Szintén csak kommutáló mátrixokra igaz.

c.) Igaz, mert az identitásmátrix minden mátrixszal kommutál, és $I^2 = I$.

11. Számítsuk ki először $n = 2$ -re és $n = 3$ -ra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sejtés: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Igazoljuk teljes indukcióval!

Azt láttuk, hogy az állítás $n = 2$ -re és $n = 3$ -ra igaz. Mutassuk meg, hogy ha n -re igaz, akkor $n + 1$ -re is!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1}$$