

Mat2 gyakorlófeladatok 5.
Parciális deriválás, deriváltmátrix, gradiens, érintősík

1. Határozzuk meg az alábbi függvények összes változó szerinti parciális deriváltját!
 - a.) $f(x, y) = \frac{x+y^2}{3xy}$
 - b.) $f(x, y, z) = \cos \sqrt{xyz^2} + 4 \ln z$
 - c.) $f(x, y) = y \cdot 6^{\ln(2x-6)}$
 - d.) $f(x, y, z) = e^{4x-y} \cdot \cos(yz^2)$
 - e.) $f(x, y, z) = (xy)^z = x^z y^z$
2. Adjuk meg a következő függvények deriváltmátrixát az értelmezési tartományuk egy tetszőleges pontjában!
 - a.) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x + y, \sin(xy), 3)$
 - b.) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z, w) = (x + 2y + z^2 - w, w^3)$
 - c.) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (e^{xy} \cdot z^2, e^z \cdot \sin(xy^2))$
3. Írjuk fel a gradiensvektort az alábbi skalár értékű függvényekhez a megadott $\underline{x}_0$ pontokban!
 - a.) $f(x, y) = \ln(6x + y^6), \underline{x}_0 = (1, 0)$
 - b.) $f(x, y, z) = (x + \sin y - z)^4, \underline{x}_0 = (2, 0, 1)$
4. a.) Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény érintősíkját az $\underline{x}_0 = (1, 1)$ pontban!
 b.) Közelítsük lineárisan f megváltozását az $(1, 1)$ és az $(1.2, 1.3)$ pontok között. Mekkora lett a közelítés hibája?
5. Írjuk fel az $f(x, y) = \frac{1}{10x+y}$ függvény érintősíkját az $\underline{x}_0 = (1, -9)$ pontban!
6. Írjuk fel az $f(x, y) = x^4 - 6xy$ felület $a = (1, 3)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét!
7. Legyen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2 + x$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(t) = (\cos t, \sin t)$. Adjuk meg $g \circ f$ deriváltfüggvényét kétféleképpen is!

Megoldások:

1. a.) $\partial_x f(x, y) = -\frac{y}{3x^2}, \partial_y f(x, y) = \frac{y^2-x}{3xy^2}$
- b.) $\partial_x f(x, y, z) = -\sin \sqrt{xyz^2} \cdot \frac{yz^2}{2\sqrt{xyz^2}}, \partial_y f(x, y, z) = -\sin \sqrt{xyz^2} \cdot \frac{xz^2}{2\sqrt{xyz^2}},$
 $\partial_z f(x, y, z) = -\sin \sqrt{xyz^2} \cdot \frac{xyz}{\sqrt{xyz^2}} + \frac{4}{z}$
- c.) $\partial_x f(x, y) = y \cdot 6^{\ln(2x-6)} \cdot \ln 6 \cdot \frac{1}{x-3}, \partial_y f(x, y) = 6^{\ln(2x-6)}$
- d.) $\partial_x f(x, y, z) = 4e^{4x-y} \cdot \cos(yz^2),$
 $\partial_y f(x, y, z) = -e^{4x-y} \cdot \cos(yz^2) + e^{4x-y} \cdot (-\sin(yz^2))z^2,$

$$\partial_z f(x, y, z) = e^{4x-y}(-\sin(yz^2))2yz$$

$$e.) \partial_z f(x, y, z) = y^z z x^{z-1}, \partial_y f(x, y, z) = x^z z y^{z-1}, \partial_x f(x, y, z) = (xy)^z \ln(xy)$$

$$2. a.) f'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(xy)y & \cos(xy)x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b.) f'(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2z & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3z^2 \end{bmatrix}$$

$$c.) f'(x, y, z) = \begin{bmatrix} ye^{xy}z^2 & xe^{xy}z^2 & e^{xy}2z \\ e^z \cos(xy^2)y^2 & e^z \cos(xy^2)2xy & e^z \sin(xy^2) \end{bmatrix}$$

$$3. a.) \text{grad} f(x, y) = (\frac{6}{6x+y^6}, \frac{6y^5}{6x+y^6}) \Rightarrow \text{grad} f(1, 0) = (1, 0)$$

$$b.) \text{grad} f(x, y, z) = (4(x + \sin y - z)^3, 4(x + \sin y - z)^3 \cos y, -4(x + \sin y - z)^3) \Rightarrow \text{grad} f(2, 0, 1) = (4, 4, -4)$$

$$4. a.) f(1, 1) = 2, f'(x, y) = (2x, 2y) \Rightarrow f'(1, 1) = (2, 2). \text{ Ebből az érintő sík } z = (2, 2) \cdot (x - 1, y - 1) + 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1) + 2 = 2x + 2y - 2.$$

$$b.) \Delta f \approx \partial_x f(1, 1) \cdot (1.2 - 1) + \partial_y f(1, 1) \cdot (1, 3 - 1) = 2 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 = 1. \text{ A pontos különbség: } f(1.2, 1.3) - f(1, 1) = 1.13. \text{ Ebből a közelítés hibája: } 1.13 - 1 = 0.13.$$

$$5. z = -10x - y + 2$$

$$6. z = -14x - 6y + 15$$

7. 1.) A láncszabály nélkül:

Felírjuk a $g \circ f$ függvényt. Ez most $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ típusú, így a keresett derivált egy 2×2 -es mátrix lesz.

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x^2 + y^2 + x) = (\cos(x^2 + y^2 + x), \sin(x^2 + y^2 + x)).$$

Ezt deriválva

$$(g \circ f)'(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin(x^2 + y^2 + x) \cdot (2x + 1) & -\sin(x^2 + y^2 + x) \cdot 2y \\ \cos(x^2 + y^2 + x) \cdot (2x + 1) & \cos(x^2 + y^2 + x) \cdot 2y \end{bmatrix}$$

2.) A láncszabállyal:

$$(g \circ f)'(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f'(x, y)$$

$$g'(t) = (-\sin t, \cos t) \Rightarrow g'(f(x, y)) = (-\sin(x^2 + y^2 + x), \cos(x^2 + y^2 + x))$$

$$f'(x, y) = (2x + 1, 2y)$$

Ezekből

$$(g \circ f)'(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin(x^2 + y^2 + x) \\ \cos(x^2 + y^2 + x) \end{bmatrix} \cdot [2x + 1, 2y]$$

Itt 2×1 -es mátrixszal szorzunk 1×2 -est. Az eredmény:

$$(g \circ f)'(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin(x^2 + y^2 + x) \cdot (2x + 1) & -\sin(x^2 + y^2 + x) \cdot 2y \\ \cos(x^2 + y^2 + x) \cdot (2x + 1) & \cos(x^2 + y^2 + x) \cdot 2y \end{bmatrix}$$