

Mat2 gyakorlófeladatok 6.
Íránymenti derivált, Hesse-mátrix, szélsőértékszámítás

1. Adjuk meg az

$$f(x, y) = \sqrt{x+1} \cdot y^2$$

függvény iránymenti deriváltját az $a = (0, 2)$ pontban, az $(1, 2)$ irány mentén. Emelkedik vagy lejt a felület ebben az irányban?

2. Tekintsük az

$$f(x, y) = \frac{1}{x+3y}$$

függvény által leírt felületet. Merre gurulna a $(3, 1, \frac{1}{6})$ pontba helyezett labda?

3. Adjuk meg az $f(x, y) = \cos(x^2) + xy^2$ függvény második deriváltját a $(0, 5)$ pontban!
4. Adjuk meg az $f(x, y) = 4x^3 + 4y^3 - 12x - 48y$ függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldások:

1. Számítsuk ki f deriváltját az $a = (0, 2)$ pontban:

$$f'(x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} y^2, \sqrt{x+1} \cdot 2y \right) \Rightarrow f'(0, 2) = (2, 4).$$

Az irányt kijelölő vektor hossza $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \neq 1$, így a normált $e = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ vektorral kell számolnunk. A keresett iránymenti derivált:

$$\partial_e f(a) = f'(a) \cdot e = (2, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^T = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}.$$

Ennek értéke pozitív, így a felület emelkedik a megadott irányban.

2. A labda a gradienssel ellentétes irányba gurulna. Ezért számítsuk ki az $a = (3, 1)$ -beli gradienst! (A megadott számhármásban a harmadik elem a függvényérték a $(3, 1)$ -ben: $f(3, 1) = \frac{1}{3+3 \cdot 1} = \frac{1}{6} \dots$)

$$f'(x, y) = \left(-\frac{1}{(x+3y)^2}, -\frac{3}{(x+3y)^2} \right) \Rightarrow f'(3, 1) = \left(-\frac{1}{36}, -\frac{3}{36} \right)$$

A labda az ezzel ellentétes irányba gurulna, vagyis az $(\frac{1}{36}, \frac{3}{36})$ vektor irányába. (Válaszul ennek a vektornak bármely pozitív számszorosát is megadhatjuk, pl. az $(1, 3)$ vektort.)

3. Az első derivált egy tetszőleges (x, y) helyen: $f'(x, y) = (-\sin(x^2)2x + y^2, 2xy)$. Ezen $f' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvényt kell még egyszer deriválni, majd a $(0, 5)$ helyen venni:

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} -\cos(x^2) \cdot 2x \cdot 2x - \sin(x^2) \cdot 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow f''(0, 5) = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Csak ott lehet lokális szélsőértéke, ahol nulla a deriváltja. Ezért először megvizsgáljuk, hogy hol nulla a derivált:

$$f'(x, y) = (12x^2 - 12, 12y^2 - 48) = (0, 0)$$

Ez azon (x, y) pontokban áll fenn, ahol $12x^2 - 12 = 0$ és $12y^2 - 48 = 0$. Megoldva az egyenletrendszert: $x = \pm 1, y = \pm 2$. Ebből összesen négy szóba jöhető (x, y) pontot kapunk:

$$(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$$

Vizsgáljuk meg mindegyikben a Hesse-mátrixot!

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 24x & 0 \\ 0 & 24y \end{bmatrix}$$

$$f''(1, 2) = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 48 \end{bmatrix}, \quad f''(1, -2) = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -48 \end{bmatrix}$$

$$f''(-1, 2) = \begin{bmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 48 \end{bmatrix}, \quad f''(-1, -2) = \begin{bmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -48 \end{bmatrix}$$

Az $(1, -2)$ és $(-1, 2)$ pontok esetén a determináns negatív, ezért ezekben a pontokban a Hesse-mátrix indefinit, és nincs lokális szélsőérték (nyeregpontot kaptunk). Az $(1, 2)$ -ben és a $(-1, -2)$ -ben pozitív a determináns. Az előbbi esetben $a_{11} > 0$, így itt a Hesse-mátrix pozitív definit, tehát az $(1, 2)$ -ben lokális minimum van. A második esetben $a_{11} < 0$, így itt a Hesse-mátrix negatív definit, tehát a $(-1, -2)$ -ben lokális maximum van.