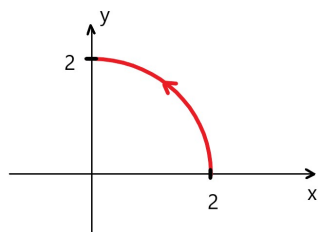


Mat2 gyakorlófeladatok 6.

Vonalintegrál

1. Paraméterezzük a síkon az origó középpontú, 2 sugarú körvonal első síknegyedbe eső darabját úgy, hogy az irányítása
a.) az óramutató járásával ellentétes (lásd az ábrát)
b.) az óramutató járásával megegyező
legyen.

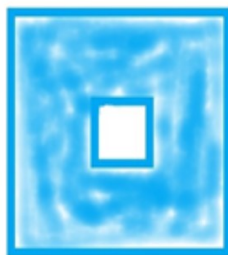


Számítsuk ki az a.) feladatban kapott r görbe hosszát az ívhossz képletével, és ellenőrizzük, hogy ez a 2 sugarú kör kerületének az egynegyede.

2. Számítsuk ki az $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ függvény vonalintegrálját az $r(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$ görbe mentén (az identitásfüggvény grafikonjának a $[0, 1]$ intervallum fölötti darabja).
3. Válasszuk ki a csillagszerű halmazokat! (Amelyik csillagszerű, ott rajzoljunk be megfelelő a pontot, amelyre nézve csillagszerű a halmaz.)



a)



b)



c)

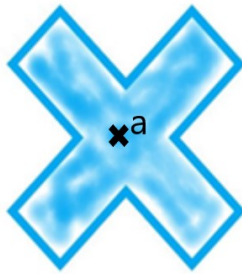
4. A 2. példabeli f függvénynek létezik-e primitív függvénye az egész $\mathbb{R}^2$ -n?
5. Létezik-e primitív függvénye az egész $\mathbb{R}^2$ -n az $f(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2, x^2 - 2xy - y^2)$ függvénynek? Ha igen, adjuk meg az összeset! Mivel egyenlő a vonalintegrál értéke egy olyan görbe mentén, amely a $(0, 1)$ pontból az $(1, 1)$ pontba halad?

Megoldások:

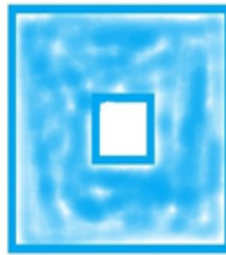
1. a.) $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 b.) $\tilde{r}(t) = (2 \cos(\frac{\pi}{2} - t), 2 \sin(\frac{\pi}{2} - t)), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $l(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|r'(t)\| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dt = \pi.$
2. $r'(t) = (1, 1)^T, f(r(t)) = f(t, t) = (t^2 + t^2, t^2 - t^2) = (2t^2, 0), \langle f(r(t)), r'(t) \rangle = 2t^2.$
 Így

$$\int_r f = \int_0^1 2t^2 dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

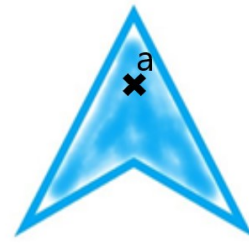
3. Az a) és c) csillagszerű, a b) nem. Az a pont egy-egy lehetséges megválasztása:



a)



b)



c)

4. f kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^2$ -n (polinom), $\mathbb{R}^2$ csillagszerű tartomány, így elég megvizsgálni, hogy a keresztben vett parciális deriváltak egyenlők-e.

$$\partial_x f_2 = 2x = \partial_y f_1 = 2y$$

csak azon (x, y) pontokban teljesül amelyekre $x = y$ (egyenes pontjai), az egész $\mathbb{R}^2$ -n nem, így nem létezik primitív függvénye.

5. f polinom, így kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^2$ -n, amely csillagszerű tartomány. Ezért elég megvizsgálni, hogy a keresztben vett parciális deriváltak egyenlőek-e:

$$\partial_x f_2 = \partial_x(x^2 - 2xy - y^2) = 2x - 2y$$

$$\partial_y f_1 = \partial_y(x^2 + 2xy - y^2) = 2x - 2y$$

Látjuk, hogy ezek minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban egyenlők. Így létezik primitív függvény. A primitív függvények meghatározása: keressük mindazon $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyre

$$1) \partial_x F(x, y) = f_1(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 \Rightarrow F(x, y) = \frac{x^3}{3} + yx^2 - y^2x + g(y),$$

ahol $g(y)$ tetszőleges, csak y -től függő függvény, valamint

$$2) \partial_y F(x, y) = f_2(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 \Rightarrow F(x, y) = yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3} + h(x),$$

ahol $h(x)$ tetszőleges, csak x -től függő függvény. A két alaknak egyszerre eleget tevő összes függvény:

$$F(x, y) = \frac{x^3}{3} + yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Mivel létezik F , így két pont közötti úton a vonalintegrál csak a görbe kezdő-és végpontjától függ, és kiszámítható a Newton–Leibniz-szabállyal. Használjuk az egyszerűség kedvéért azt az F függvényt, amelyben $C = 0$:

$$\int_r f = F(r(b)) - F(r(a)) = F(1, 1) - F(0, 1) = 1/3 + 1 - 1 - 1/3 - (0 + 0 - 1/3) = 1/3.$$