

Hatványsorok, Taylor-sorok

1. A nevezetes Taylor-sorok felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények 0 középpontú Taylor-sorát!

$$(a) \sin x^2 \quad (b) \frac{1}{1+x^2} \quad (c) e^{-x} \quad (d) xe^{-x} \quad (e) \frac{x^2}{1+x^2}$$

2. a) Miért mondják azt, hogy „kis x esetén $\sin x \approx x$ ”? Határozzuk meg azt az I intervallumot, amelyre érvényes, hogy $\forall x \in I$ esetén $|\sin x - x| \leq 0,01$!

b) Mutassuk meg, hogy ha az $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon a $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ közelítő képletet használjuk, akkor legfeljebb 0,005 hibát követünk el! Ellenőrizzük ezt például $x = \frac{\pi}{6}$ esetén!

Megoldások:

1. a) A $\sin$ függvény 0 középpontú hatványsorában x helyébe x^2 -et írva

$$\sin x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4n+2}.$$

- b) A $(-1, 1)$ intervallumon

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Most x helyébe $-x^2$ -et írva

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

- c) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, ezért

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

- d) $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$, így

$$xe^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+1}.$$

e) A $(-1, 1)$ intervallumon $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$, ezért

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+2}$$

2. a) Az $f(x) = \sin x$ függvénynek az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó első-, sőt a másodfokú Taylor-polinomja is a $T_2(\sin x, 0) = x$ függvény. Nekünk az kell most, hogy

$$|\sin x - x| = |\sin x - T_2(\sin x, 0)| = \left| \frac{\sin'''(\xi)}{3!} x^3 \right| \leq \frac{1}{6} |x|^3 \leq 0,01$$

legyen. Ebből azt kapjuk, hogy $|x| \leq 0,3914$, azaz a $[-0,3914; 0,3914]$ intervallumban a $\sin x \approx x$ közelítéssel legfeljebb 0,01-et tévedünk.

b) Ha most az $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon vagyunk, és a megadott polinomot használjuk, ami a hatodfokú Taylor-polinomja a szinuszfüggvénynek a nulla körül, akkor

$$|\sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})| = |\sin x - T_6(\sin x, 0)| = \left| \frac{\sin^{(7)}(\xi)}{7!} x^3 \right| \leq$$

$$\frac{1}{7!} |x|^7 \leq \frac{1}{5040} \left(\frac{\pi}{2} \right)^7 \approx 0,00468 < 0,005$$

Például $x = \frac{\pi}{6}$ esetén tudjuk, hogy $\sin \frac{\pi}{6} = 0,5$. A fenti közelítő képletet használva 16 tizedesjegy pontossággal

$$\frac{\pi}{6} - \frac{(\frac{\pi}{6})^3}{6} + \frac{(\frac{\pi}{6})^5}{120} = 0,500002132588792 \approx 0,5,$$

ami jóval a kiszámolt hibahatáron belül van.