

Felület paraméterezése, felületi integrál

1. Paraméterezzük a $(0, 0, 5)$ középpontú, az xy -síkkal párhuzamos síkú, 2 sugarú körlapot.
2. Paraméterezzük az origó középpontú, R sugarú gömbfelületnek azt a darabját, amely az xy -sík felett helyezkedik el.
3. Paraméterezzük annak a hengernek a palástját, amelynek magassága 10, és alaplappja
 - a) a $(2, 0, 0)$ középpontú, 2 sugarú, az xy -síkkal párhuzamos síkú kör
 - b) a $(2, 5, -1)$ középpontú, 3 sugarú, az xy -síkkal párhuzamos síkú kör.
4. Számítsuk ki az $f(x, y, z) = (x + y, 2z, 10)$ vektormező felületi integrálját arra a körlapra, amely az xy -síkkal párhuzamosan $z = 1$ magasságban helyezkedik el, középpontja a $(0, 0, 1)$ pont, és sugara 1. A felszínvektorokat fölfelé irányítsuk.
5. Számítsuk ki a $v(\underline{r}) = \underline{r}$ vektormező ($\underline{r}$ az (x, y, z) vektort jelöli) felületi integrálját a 0 középpontú egységsugarú gömbfelületre.

Megoldások:

1. Jelölje ϕ a körlap egy pontjába húzott helyvektor xy -síkra eső vetületének az x -tengellyel bezárt szögét, és r a pontnak és a kör középpontjának a távolságát.
 $\Phi(\phi, r) = (r \cos \phi, r \sin \phi, 5), \quad \phi \in [0, 2\pi], r \in [0, 2].$
2. A paraméterezés hasonlít a teljes gömbfelületéhez, de most ϑ (a helyvektor z -tengellyel bezárt szöge) csak 0 és $\frac{\pi}{2}$ között változhat:
 $\Phi(\phi, \vartheta) = (R \sin \vartheta \cos \phi, R \sin \vartheta \sin \phi, R \cos \vartheta), \quad \phi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}].$
3. Bocsássunk a hengerpalást egy pontjából merőlegest a forgástengelyre. Jelölje ϕ azt a szöget, amelyet ennek xy -síkra eső vetülete bezár az x -tengellyel, és z a pont magasságát (azaz z -koordinátáját).
 - a) $\Phi(\phi, z) = (2 \cos \phi + 2, 2 \sin \phi, z), \quad \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, 10];$
 - b) $\Phi(\phi, z) = (3 \cos \phi + 2, 3 \sin \phi + 5, z), \quad \phi \in [0, 2\pi], z \in [-1, 9]$
4. A felület paraméterezése

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 1), \quad r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi],$$

ahol r a pontnak a kör középpontjától mért távolsága, φ pedig az adott pontot a $(0, 0, 1)$ ponttal összekötő szakasz és $(0, 0, 1)$ pontot a $(0, 1, 1)$ ponttal összekötő

szakasz közbezárt a szöge. Ekkor

$$f(\Phi(r, \varphi)) = (r \cos \varphi + r \sin \varphi, 2, 10),$$

$$\partial_r \Phi \times \partial_\varphi \Phi = (0, 0, r)$$

(ekkor mutatnak fölfelé a felszínvektorok).

$$\int_{\Phi} f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle r \cos \varphi + r \sin \varphi, 2, 10 \rangle, (0, 0, r) \rangle d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 10r d\varphi dr = 10\pi.$$

5. A felület paraméterezése

$$\Phi(\phi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta), \quad \phi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi].$$

Kiszámítandó az

$$\int_{\Phi} v = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \langle v(\Phi(\phi, \vartheta)), \partial_{\vartheta} \Phi \times \partial_{\phi} \Phi \rangle d\vartheta \right) d\phi$$

integrál. Itt

$$v(\Phi(\phi, \vartheta)) = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta),$$

$$\partial_{\vartheta} \Phi = (\cos \vartheta \cos \phi, \cos \vartheta \sin \phi, -\sin \vartheta)$$

és

$$\partial_{\theta} \Phi = (-\sin \vartheta \sin \phi, \sin \vartheta \cos \phi, 0),$$

amelyek vektoriális szorzata akkor mutat kifelé a felületből, ha $\partial_{\vartheta} \Phi$ áll elől. Számítsuk ki az integrandust:

$$\partial_{\vartheta} \Phi \times \partial_{\phi} \Phi = (\sin^2 \vartheta \cos \phi, \sin^2 \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta \sin \vartheta),$$

így egyszerűsítések után a skaláris szorzat

$$\langle v(\Phi(\phi, \vartheta)), \partial_{\vartheta} \Phi \times \partial_{\phi} \Phi \rangle = \sin \vartheta.$$

Tehát

$$\int_{\Phi} v = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \right) d\phi = \int_0^{2\pi} 2 d\phi = 4\pi.$$