

Differenciálegyenletek I. (szétválasztható, elsőrendű lineáris)

1. Adjuk meg az alábbi szétválasztható differenciálegyenletek összes megoldását, valamint azt, amelyik kielégíti a megadott kezdeti feltételt!

a.) $y'(t) = 3e^t, y(0) = 10$

b.) $y'(t) = \frac{t}{y^2}, y(0) = 2$

c.) $y^2 \cdot y'(t) = t^2(1 + t^3), y(0) = 1$

d.) $y'(t) = 2t(1 - y^2), y(1) = \frac{1}{2}$

2. Adjuk meg az

$$y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = t^3$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlet összes megoldását!

3. Adjuk meg az

$$y'(t) - 2y(t) = e^{2t}$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlet összes megoldását!

Megoldások:

1. a.) Ebben a differenciálegyenletben a jobb oldal csak t függvénye, így nem muszáj szétválaszthatóként kezelni. A jobb oldali függvény összes primitív függvénye a megoldás: $y(t) = 3e^t + c$ ($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges); a kezdeti feltételt kielégítő megoldás pedig $y(t) = 3e^t + 7$.

b.) $\int y^2 dy = \int t dt \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{t^2}{2} + c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. 3-mal szorozva és köbgyököt vonva az összes megoldás: $y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + \tilde{c}}$, $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A kezdeti feltételt kielégítő megoldás meghatározása: $y(0) = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 0^2 + \tilde{c}} = \sqrt[3]{\tilde{c}} = 2 \Rightarrow \tilde{c} =$

$$8 \Rightarrow y(t) = \sqrt{\frac{3}{2}t^2 + 8}$$

c.) $y(t) = \sqrt[3]{t^3 + \frac{1}{2}t^6 + c}$, ($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges); $y(t) = \sqrt[3]{t^3 + \frac{1}{2}t^6 + 1}$

d.) $y(t) = 1 - \frac{1}{t^2+c}$ ($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges); $y(t) = 1 - \frac{1}{t^2+1}$

2. A homogén egyenlet megoldása:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t}y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{2}{t} dt$$

$$\ln |y| = -2 \ln |t| + c_1$$

$$|y| = e^{\ln \frac{1}{t^2}} \cdot e^{c_1} = \frac{1}{t^2} \cdot e^{c_1}$$

$$y_{\text{hom}}(t) = c \cdot \frac{1}{t^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldását $y_{\text{part}}(t) = c(t) \cdot \frac{1}{t^2}$ alakban keressük.

$$c'(t) \frac{1}{t^2} + c(t) \cdot \frac{-2}{t^3} + \frac{2}{t} c(t) \frac{1}{t^2} = t^3$$

$$c'(t) = t^5 \Rightarrow c(t) = \frac{t^6}{6} (+\text{konst.}) \Rightarrow y_{\text{part}}(t) = \frac{t^4}{6}$$

Így az összes megoldás:

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + y_{\text{part}}(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{t^4}{6}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. $y_{\text{hom}}(t) = c \cdot e^{2t}$, $c \in \mathbb{R}$. $y_{\text{part}}(t) = c(t)e^{2t}$ alakban keresve a partikuláris megoldást $c(t) = -t$. Az összes megoldás $y(t) = ce^{2t} - te^{2t}$, $c \in \mathbb{R}$.