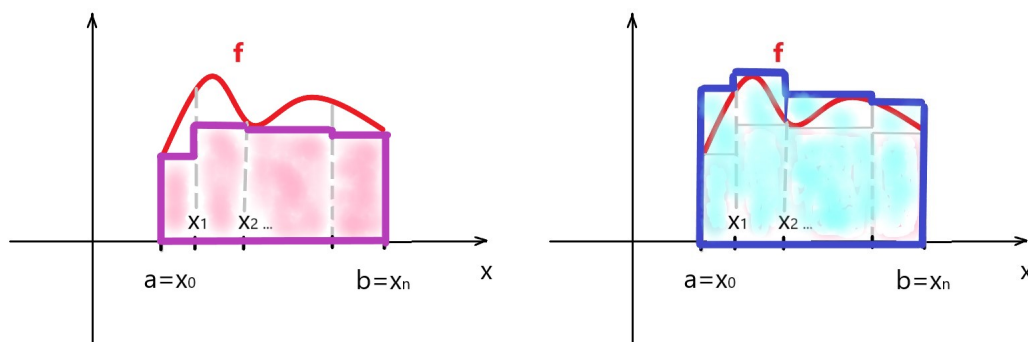


1. Többszörös integrálok

Ebben a fejezetben többváltozós, skalárértékű függvények Riemann-integráljával foglalkozunk. Ehhez először idézzük fel, mit tanultunk az egyváltozós függvények Riemann-integráljáról.

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Jelölje $\mathcal{A}^{\text{alsó}}$ az összes alsó közelítő összeg halmazát, $\mathcal{A}^{\text{felső}}$ pedig az összes felső közelítő összeg halmazát, amelyet az f függvényhez az $[a, b]$ intervallumot minden lehetséges módon felosztva készíthetünk. (Minden részintervallumon a függvény infimumát ill. szupremumát megszoroztuk a részintervallum hosszával, és összeadtuk ezeket a szorzatokat.)



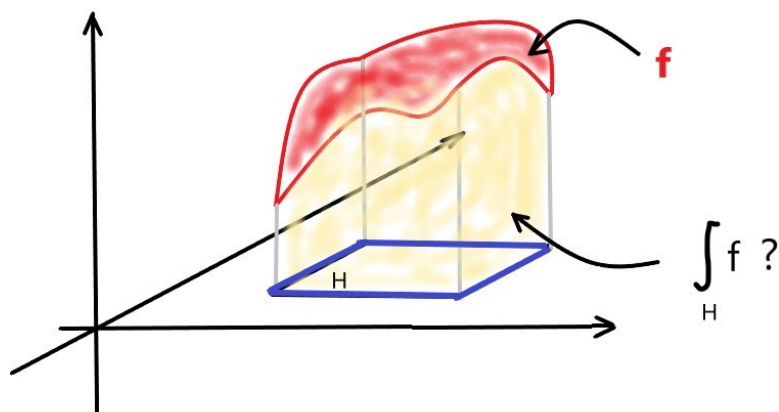
Alsó és felső közelítő összegek (a besatírozott rózsaszín és kék területek nagysága) egy f függvényre, adott felosztáson

1.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n (jelölése $f \in R[a, b]$), ha $\sup \mathcal{A}^{\text{alsó}} = \inf \mathcal{A}^{\text{felső}}$, és ekkor ezt a közös értéket nevezzük f $[a, b]$ -n vett Riemann-integráljának. Tehát

$$\int_a^b f = \sup \mathcal{A}^{\text{alsó}} = \inf \mathcal{A}^{\text{felső}}.$$

A Riemann-integrál szemléletes geometriai jelentése a "görbe alatti terület".

Ennek mintájára szeretnénk értelmezni a többváltozós, $\mathbb{R}$ -be képező függvények Riemann-integrálját. Legyen tehát $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, ahol $N \in \mathbb{N}$. Ha $H \subset \mathbb{R}^N$ egy korlátos halmaz az f értelmezési tartományában, akkor mit jelentsen $\int_H f$? A rajzon egy kétváltozós függvény grafikonját látjuk, és berajzoltunk egy H halmazt az értelmezési tartományban. Talán sejthetjük, hogy itt az integrál a grafikon alatti térfogatot adja majd meg. De hogyan lehet ezt az integrálfogalmat értelmezni?



Most $H \subset \mathbb{R}^N$ -beli. Ezt szintén fel kellene osztani kis részekre, amelyeknek jellemezhető a kiterjedése (ez felelne meg a valós intervallum hosszának), majd vennénk ezeken f infimumát ill. szupremumát. Ekkor már lenne értelme alsó és felső közelítő összegnek, és innen kézenfekvő lenne a definíció. Kulcsfontosságú tehát egy $\mathbb{R}^N$ -beli halmaz kiterjedését definiálnunk. Ehhez először megismerkedünk az N -dimenziós intervallum fogalmával, ugyanis a kiterjedés ilyen halmazra értelmezhető a legegyszerűbben.

Vegyünk N darab valós korlátos és zárt intervallumot, azaz legyen

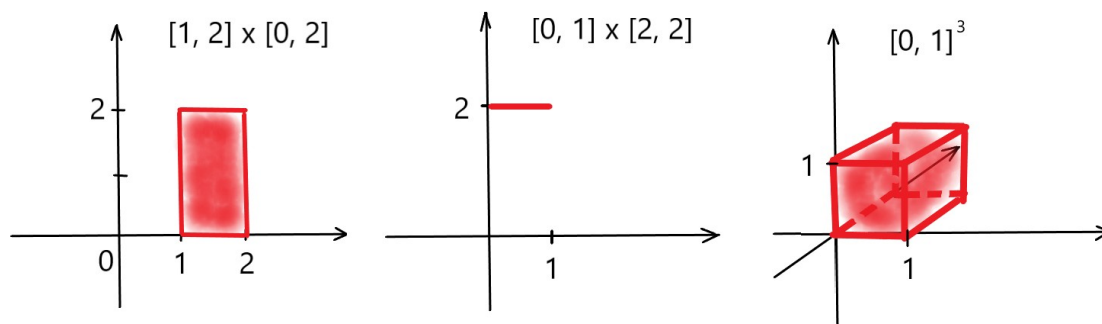
$$I^j := [a^j, b^j], \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \text{ahol } a^j \leq b^j.$$

(Itt j felül indexet jelent, és nem hatványozást jelöl.)

1.2 Definíció. Az $I := I^1 \times I^2 \times \dots \times I^N \subset \mathbb{R}^N$ típusú *ponthalmazt* N -dimenziós *intervallumnak* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy $a^j = b^j$ is lehet, az $[a^j, a^j]$ intervallum az $\{a^j\}$ egyelemű halmazként értendő. Így például a $[0, 1] \times [2, 2] = [0, 1] \times \{2\}$ halmaz is egy $\mathbb{R}^2$ -beli intervallum. $N = 2$ esetén téglalapnak, $N = 3$ esetén téglatestnek is nevezzük az intervallumot.

INTERVALLUMOK



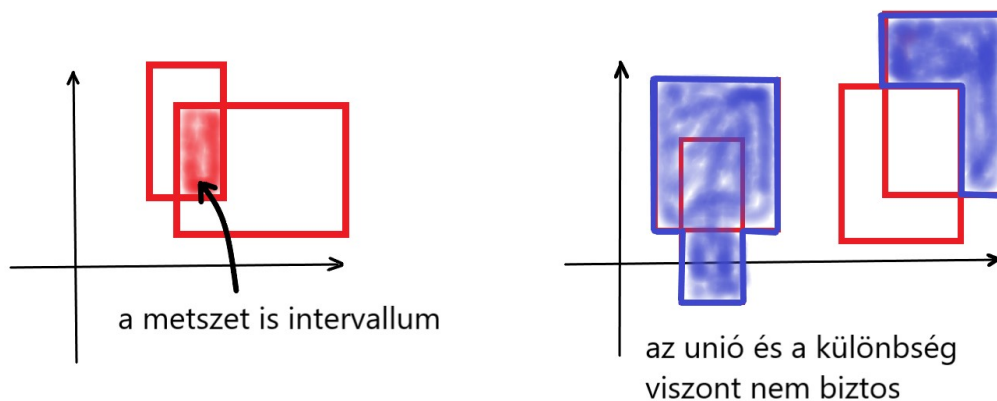
Jelölje $\mathcal{I}_0$ (írott nagy i betű 0 indexszel) az $\mathbb{R}^N$ -beli intervallumok és az üres halmaz ($\emptyset$) összességét. Könnyen meggondolhatók az alábbi állítások:

1.3 Állítás. $\mathcal{I}_0$ zárt a metszetképzésre, azaz

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I}_0 \Rightarrow I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I}_0.$$

1.4 Állítás. $\mathcal{I}_0$ nem zárt az unió- és a különbségképzésre.

Ezeket nem bizonyítjuk, csak néhány ábrával szemléltetjük:



Szeretnénk jellemezni, hogy "mekkora helyet foglal el" egy ilyen ponthalmaz. (Mindegyikhez egy mérőszámot szeretnénk hozzárendelni.) Ehhez definiáljunk egy $\mu_0 : \mathcal{I}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvényt a következőképpen:

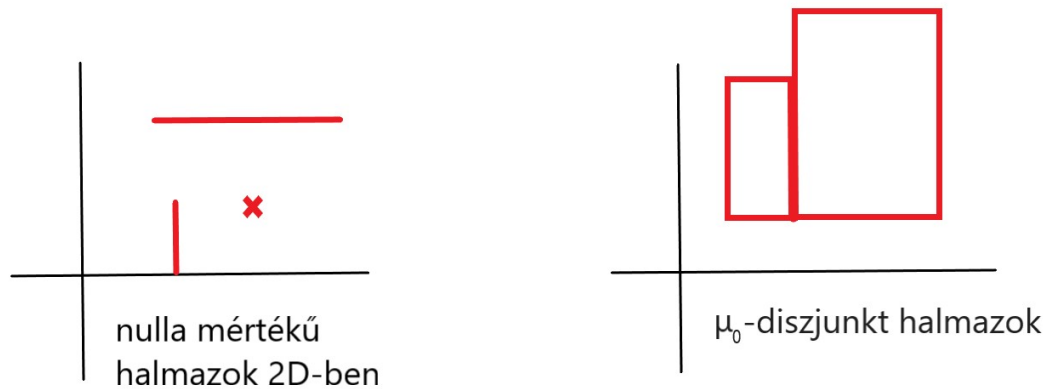
$$\mu_0(I) := \begin{cases} 0, & \text{ha } I = \emptyset \\ \prod_{j=1}^N (b^j - a^j), & \text{ha } I \neq \emptyset. \end{cases}$$

Tehát az üres halmazhoz a nullát rendeljük, és $N = 2$ esetén a téglalap területét rendeljük hozzá az alakzathoz, téglatest esetén ($N = 3$) pedig a térfogatát. (Az $N = 1$ esetben pedig csak egy valós intervallum a halmaz, és ennek hosszáról van szó.)

1.5 Definíció. A $\mu_0(I)$ számot az $I \in \mathcal{I}_0$ halmaz mértékének nevezzük.

Vegyük észre, hogy $\mu_0(I) = 0$ nemcsak akkor teljesül, ha I üres halmaz, hanem akkor is, ha valamely j indexre $a^j = b^j$.

1.6 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_0$ halmazok μ_0 -diszjunktak, ha a közös részük mértéke nulla, azaz $\mu_0(I_1 \cap I_2) = 0$.

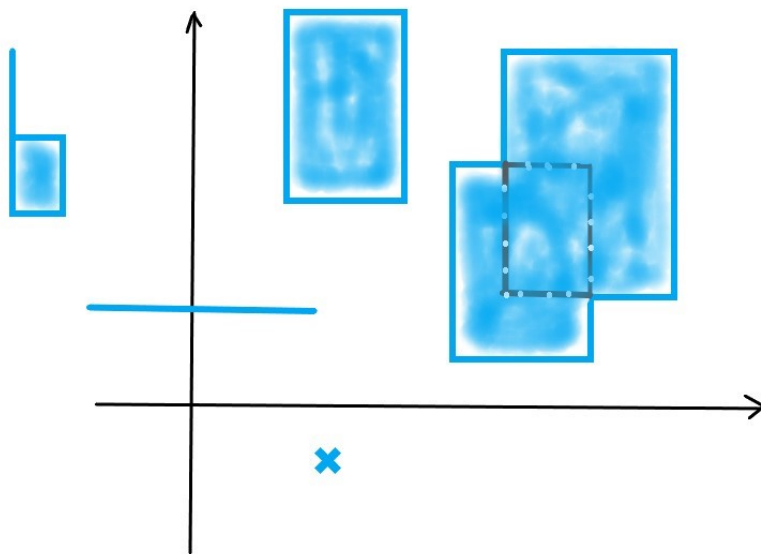


(A definíció értelmes, hiszen $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I}_0$, tehát μ_0 értelmezve van ezen a halmazon.) Vegyük észre, hogy két halmaz úgy is lehet μ_0 -diszjunkt, ha van közös pontjuk, azaz ha halmazelméleti értelemben nem diszjunktak. Pl. az $I_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ és az $I_2 = [0, 1] \times [1, 2]$ halmazok nem diszjunktak (mert van közös pontjuk), ugyanakkor μ_0 -diszjunktak (mert közös pontjaiknak a halmaza 0 mértékű).

Szeretnénk, ha nem csak az intervallumoknak volna mértéke, hanem általánosabb halmazoknak is. Tegyük fel, hogy $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_0$ μ_0 -diszjunkt halmazok. Jelölje az ilyen halmazok unióját $I_1 \cup I_2$. (Természetesen az nem biztos, hogy $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{I}_0$.)

1.7 Definíció. Jelölje $\mathcal{I}$ azon $\mathbb{R}^N$ -beli ponthalmazok halmazát, amelyek előállíthatók véges számú $\mathcal{I}_0$ -beli halmaz uniójaként.

Az ábrán kékkel berajzoltunk néhány $\mathcal{I}$ -beli halmazt $\mathbb{R}^2$ -ben. (A vízszintes tengely alatti kis kék „x” egyetlen pontot jelöl.)



Nyilvánvalóan $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$, tehát $\mathcal{I}_0$ minden eleme $\mathcal{I}$ -ben is benne van, de $\mathcal{I}$ -nek további elemei is vannak. (Azonban $\mathcal{I}$ még messze nem tartalmaz minden korlátos halmazt, pl. a körlapok, háromszögek mind nem rakhatók össze véges sok intervallumból, ezek tehát még $\mathcal{I}$ -nek sem elemei.) Vajon hogyan lehetne a μ_0 -mértéket $\mathcal{I}$ -re kiterjesztetni? Ehhez fontos lesz a következő észrevétel: Belátható, hogy ha valami $\mathcal{I}$ -ben van, akkor nemcsak hogy előáll véges sok $\mathcal{I}_0$ -beli halmazból, hanem előáll véges sok, **páronként μ_0 -diszjunkt** $\mathcal{I}_0$ -beli halmazból is:

1.8 Állítás. Minden $I \in \mathcal{I}$ halmazhoz létezik olyan páronként μ_0 -diszjunkt $\mathcal{I}_0$ -beli, véges számú halmazok, amelyek uniójaként I előállítható, azaz $\forall I \in \mathcal{I}$ esetén $\exists I_1, I_2, \dots, I_n \in \mathcal{I}_0$, amelyekre

- $\mu_0(I_i \cap I_k) = 0 \ \forall i \neq k$; és
- $I = \cup_{k=1}^n I_k$.

Szeretnénk egy ilyen halmaznak is definiálni a mértékét. Az ötlet az, hogy összeadjuk azon $\mathcal{I}$ -beli μ_0 -diszjunkt halmazok mértékét, amelyekből unióval össze tudjuk rakni a halmazt. Jelölje $\mu : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a következő leképezést: ha $I \in \mathcal{I}$ és $I = \cup_{k=1}^n I_k$, akkor

$$\mu(I) := \sum_{k=1}^n \mu_0(I_k).$$

Elnevezés: a $\mu(I)$ értéket az $I \in \mathcal{I}$ halmaz mértékének nevezzük.

Megmutatható, hogy a definíció értelmes, azaz ha $\{B_k\}_{k=1}^m$ az I egy másik felosztása, azaz

$I = \cup_{k=1}^n B_k$, akkor

$$\sum_{k=1}^m \mu_0(B_k) = \sum_{k=1}^n \mu_0(I_k).$$

Így tehát a fenti $\mu : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ egy függvény, valóban minden $I \in \mathcal{I}$ halmazhoz egyértelműen rendeltünk hozzá egy számot. Könnyen látható továbbá, hogy ha $I \in \mathcal{I}_0$, akkor $\mu(I) = \mu_0(I)$, tehát μ a μ_0 mérték kiterjesztése $\mathcal{I}_0$ -ról a nála bővebb $\mathcal{I}$ halmazra.

1.9 Állítás. *Az $\mathcal{I}$ halmaz zárt a metszet-, az unió- és a különbségképzésre, azaz $\forall A, B \in \mathcal{I}$ esetén $A \cup B, A \cap B$ és $\overline{A \setminus B} \in \mathcal{I}$. (Itt $\overline{A \setminus B}$ az A mínusz B különbséghalmaz lezártja, vagyis $A \setminus B$ kiegészítve a határpontjaival.)*

1.10 Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $A, B \in \mathcal{I}$ halmazok μ -diszjunktak, ha $\mu(A \cap B) = 0$.*

A μ -diszjunkt halmazok uniójára szintén az $A \cup B$ jelölést használjuk.

1.11 Állítás. *Tegyük fel, hogy az $A, B \in \mathcal{I}$ halmazok μ -diszjunktak. Ekkor*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

azaz az uniójuk mértéke a mértékek összege. (Kétdimenziós ábrán könnyen látható...)

A fenti tulajdonságok nemcsak két, hanem véges sok halmazra is igazak. Azaz: ha $A_1, A_2, \dots, A_d \in \mathcal{I}$, akkor

- $\cup_{k=1}^d A_k \in \mathcal{I}$;
- ha $\mu(A_k \cap A_j) = 0 \ \forall k \neq j$, akkor $\mu(\cup_{k=1}^d A_k) = \sum_{k=1}^d \mu(A_k)$.

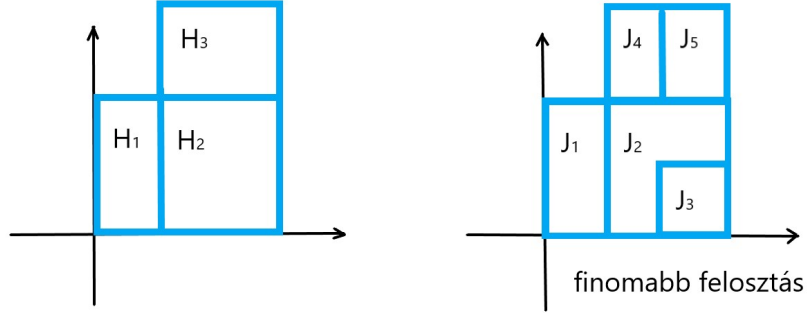
1.12 Definíció. *Legyen $H \in \mathcal{I}$, $H = \cup_{k=1}^n H_k$ és $H_k \in \mathcal{I}, k = 1, 2, \dots, n$. Ekkor a $\tau := \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ halmazrendszer a H halmaz egy felosztásának nevezzük.*

A $H \in \mathcal{I}$ halmaz felosztásainak az összességét $\mathbb{F}(H)$ -val jelöljük. Tehát

$$\tau \in \mathbb{F}(H) \iff \tau = \{H_1, H_2, \dots, H_n\} \text{ és } \cup_{k=1}^n H_k = H.$$

1.13 Definíció. *Legyenek $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{F}(H)$, $\tau_1 := \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$, $\tau_2 := \{J_1, J_2, \dots, J_m\}$. Azt mondjuk, hogy τ_2 finomabb, mint τ_1 , ha $\forall J_k \in \tau_2$ esetén létezik $H_l \in \tau_1$, amelyre $J_k \subset H_l$.*

Azaz a finomabb felosztás a durvább felosztásban lévő halmazok továbbosztásával keletkezik.



1.1. Riemann-integrál $\mathcal{I}$ -beli halmazokon

Legyen $H \in \mathcal{I}$, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, és $\tau \in \mathbb{F}(H)$, azaz $H = \cup_{J \in \tau} J$. (Itt megszabadulunk az indexes jelöléstől.) Vezessük be a következő jelöléseket:

$$m := \inf_H f, \quad M := \sup_H f, \quad m_J := \inf_J f, \quad M_J := \sup_J f.$$

Ekkor $m \leq m_J, M \geq M_J \quad \forall J \in \tau$.

1.14 Definíció. Az

$$s(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} m_J \cdot \mu(J), \quad S(f, \tau) := \sum_{J \in \tau} M_J \cdot \mu(J)$$

számokat az f függvény τ felosztáshoz tartozó alsó ill. felső közelítőösszegének nevezzük.

1.15 Megjegyzés. $N = 2$, $f \geq 0$ esetén könnyű geometriai interpretációt adni: a beírt ill. köréírt hasábok térfogata.

1.16 Definíció. Az

$$\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$$

számot az f függvény τ felosztáshoz tartozó oszcillációs összegének nevezzük.

Nyilvánvalóan, $\Omega(f, \tau) \geq 0$. Emellett könnyen meggondolható a következő

1.17 Állítás. Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{F}(H)$, és τ_2 finomabb, mint τ_1 , akkor

$$s(f, \tau_2) \geq s(f, \tau_1), \quad \text{és} \quad S(f, \tau_2) \leq S(f, \tau_1).$$

1.18 Következmény. Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{F}(H)$, és τ_2 finomabb, mint τ_1 , akkor

$$0 \leq \Omega(f, \tau_2) \leq \Omega(f, \tau_1).$$

Könnyen látható a következő egyenlőtlenség-láncolat érvényessége:

$$m \cdot \mu(H) = m \cdot \sum_{J \in \tau} \mu(J) \leq \sum_{J \in \tau} m_J \cdot \mu(J) = s(f, \tau) \leq$$

$$S(f, \tau) = \sum_{J \in \tau} M_J \cdot \mu(J) \leq \sum_{J \in \tau} M \cdot \mu(J) = M \cdot \sum_{J \in \tau} \mu(J) = M \cdot \mu(H).$$

Tehát az $\{s(f, \tau), \tau \in \mathbb{F}(H)\}$, $\{S(f, \tau), \tau \in \mathbb{F}(H)\}$ számhalmazok felülről és alulról egyaránt korlátosak. Ezért mindkettőnek létezik infimuma és szupremuma is $\mathbb{R}$ -ben.

1.19 Definíció. Az

$$I_*(f) := \sup_{\tau \in \mathbb{F}(H)} s(f, \tau), \quad I^*(f) := \inf_{\tau \in \mathbb{F}(H)} S(f, \tau)$$

számokat az f függvény $H \in \mathcal{I}$ halmazon vett alsó ill. felső integráljának nevezzük.

Pl. 1. Legyen $H = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = c =$ állandó. Ekkor $m = M = c$, azaz $\forall \tau \in \mathbb{F}(H)$ esetén $s(f, \tau) = S(f, \tau) = c \cdot 1$. Tehát $I_*(f) = I^*(f) = c$.

Pl. 2. Legyen $H = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, és $D : H \rightarrow \mathbb{R}$ a következő, Dirichlet-típusú függvény:

$$D(x_1, x_2) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x_1 \text{ vagy } x_2 \text{ racionális;} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor $\forall \tau \in \mathbb{F}(H)$ esetén $m_J = 0$, $M_J = 1$ minden J -re. Így $s(f, \tau) = 0$, $S(f, \tau) = 1$ $\forall \tau \in \mathbb{F}(H)$, azaz $I_*(f) = 0$, $I^*(f) = 1$.

1.20 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \in \mathcal{I}$) korlátos függvény Riemann-integrálható H -n, ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ezt a közös számot nevezzük az f függvény Riemann-integráljának. Jelölés: $f \in R(H)$, és $I_*(f) = I^*(f) =: \int_H f$. (Szokásos az $\int_H f(x) dx$ jelölés is.)

Pl. Az $f(x) = c$ konstans függvény tehát $R(H)$ -beli, és $\int_H f = c \cdot \mu(H)$. Ugyanakkor $D \notin R(H)$.

Megmutatható a következő állítás.

1.21 Állítás.

$$f \in R(H) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \tau \in \mathbb{F}(H), \text{ amelyre } \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

1.2. A Riemann-integrálható függvények tulajdonságai

1. Legyenek $f, g \in R(H)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor

- $\lambda_1 f + \lambda_2 g \in R(H)$, és
- $\int_H (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int_H f + \lambda_2 \int_H g$.

Vegyük észre, hogy az első tulajdonság magában foglalja egy összegfüggvény tagonkénti integrálhatóságát ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ eset), és azt is, hogy skalárral való szorzásnál a skalár kihozható (a második egyenlőségben $\lambda_2 = 0$ eset.)

2. Legyenek $f, g \in R(H)$. Ekkor

- $f \cdot g \in R(H)$, és
- ha g sehol sem nulla H -n, akkor $\frac{f}{g} \in R(H)$.

Vegyük észre, hogy itt csak a szorzat- ill. hányadosfüggvény integráljának a létezését állítjuk, de általános képletet nem adunk (és nem is lehet adni) ezekre az integrálokra.

3. Legyenek $H_1, H_2 \in \mathcal{I}$, $\mu(H_1 \cap H_2) = 0$, $f : H_1 \cup H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

- $f \in R(H_1 \cup H_2) \iff f \in R(H_1)$ és $f \in R(H_2)$;
- $\int_{H_1 \cup H_2} f = \int_{H_1} f + \int_{H_2} f$.

4. Legyen $f \in R(H)$ és $f \geq 0$. Ekkor $\int_H f \geq 0$.

Biz.: $s(f, \tau) = \sum_J m_J \mu(J) \geq 0$, ezért $\int_H f = \sup_\tau s(f, \tau) \geq 0$. (Ugyanis egy csupa nemnegatív számokból álló számhalmaz szupremuma is nemnegatív.)

5. Legyen $f, g \in R(H)$, és $f \geq g$. Ekkor $\int_H f \geq \int_H g$.

Biz.: Mivel $f - g \in R(H)$ és $f - g \geq 0$, ezért $\int_H (f - g) \geq 0$. Az 1. tulajdonság miatt ekkor $\int_H f - \int_H g \geq 0$.

6. Legyen $f \in R(H)$. Ekkor

- $|f| \in R(H)$;
- $\int_H |f| \geq |\int_H f|$.

Biz.: Nyilván $\Omega(|f|, \tau) \leq \Omega(f, \tau)^1$, ezért az $|f|$ függvény oszcillációs összege is tetszőlegesen kicsivé tehető, azaz $|f| \in R(H)$. Mivel

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

¹Ez onnan következik, hogy minden J -n $\omega(|f|) \leq \omega(f)$, ahol $\omega(f) := \sup_J f - \inf_J f = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in J\}$.

ezért az 5. tulajdonság alapján

$$-\int_H |f| \leq \int_H f \leq \int_H |f|,$$

így a második tulajdonság is igaz.

7. Legyen $H \in \mathcal{I}$ és $f \in C(H)$ (azaz f folytonos H -n). Ekkor $f \in R(H)$.
8. Láttuk, hogy két integrálható függvény szorzata is integrálható, de az integrálra nem adható képlet. Be tudjuk-e az integrált bizonyos határok közé szorítani legalább? Legyenek $f, g \in R(H)$, $H \in \mathcal{I}$, $g \geq 0$. Ekkor

$$m \cdot \int_H g \leq \int_H (f \cdot g) \leq M \cdot \int_H g.$$

Biz.: Nyilván mg, Mg és $f \cdot g \in R(H)$. Mivel $g \geq 0$, ezért $mg \leq f \cdot g \leq Mg$, és innen az állítás könnyen adódik.

9. Legyenek $f \in C(H)$, $g \in R(H)$ és $g \geq 0$. Ekkor létezik olyan $\xi \in H$ pont, amelyre

$$\int_H (f \cdot g) = f(\xi) \cdot \int_H g.$$

Biz.: Ha $\int_H g = 0$, akkor 8. miatt $\int_H (f \cdot g) = 0$, így az állítás minden $\xi \in H$ pontra igaz. Ha pedig $\int_H g > 0$, akkor 8.-at leosztva

$$m \leq \frac{\int_H (f \cdot g)}{\int_H g} \leq M.$$

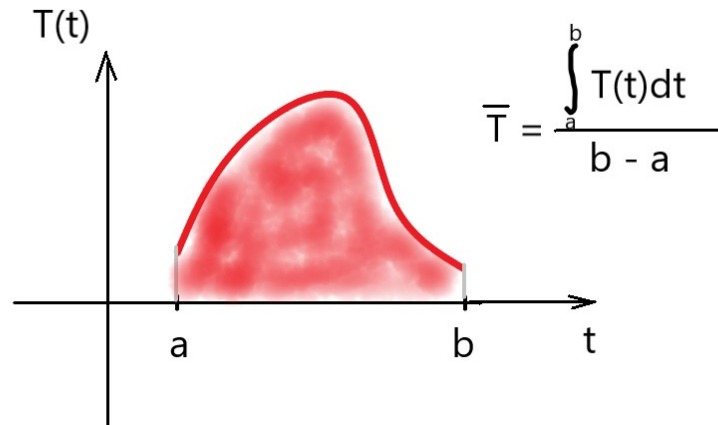
Mivel f folytonos függvény, ezért felvesz minden értéket az $[m, M]$ intervallumból (Bolzano–Darboux-tétel), így az állítás igaz.

1.22 Következmény. $g \equiv 1$ esetén a 9. tulajdonságból $\exists \xi \in H$, amelyre $\int_H f = f(\xi) \cdot \mu(H)$. Tehát van olyan $\xi \in H$ pont, amelyben a függvényérték éppen megegyezik a függvény integráljának és a H mértékének a hányadosával:

$$f(\xi) = \frac{\int_H f}{\mu(H)}.$$

Ez a hányados a függvény ún. integrálközepe vagy integrálátlag. Folytonos függvény esetén (pl. hőmérséklet az idő függvényében) ezzel jellemezhetjük a függvény átlagos értékét egy adott H halmazon. Az egydimenziós esetben, ha H az $[a, b]$ intervallumot

jelenti, akkor az ábra szerinti görbe alatti területet az $[a, b]$ hosszával $(b - a)$ elosztva kapjuk a függvény átlagos értékét az $[a, b]$ -n.

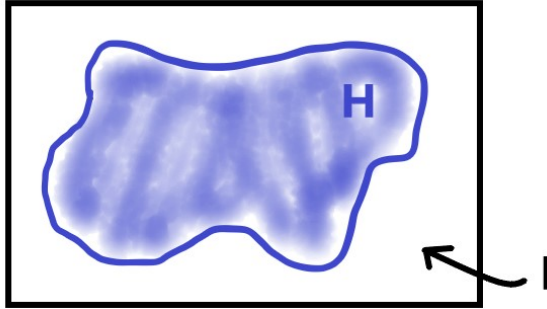


Az a és b időpont közötti átlagos hőmérsékleti érték kiszámítása, ha a $T(t)$ függvény folytonos.

1.3. Riemann-integrálható függvények tetszőleges $\mathbb{R}^N$ -beli korlátos halmazon

Vegyük észre, hogy eddig csak $\mathcal{I}$ -beli halmazon vett integrálról volt szó. De mit tegyünk, ha a H halmaz, amelyen f -et integrálni szeretnénk, nem $\mathcal{I}$ -beli? (Lehet pl. körlap, háromszög stb. is...) Látni fogjuk, hogy a problémát visszavezethetjük $\mathcal{I}$ -beli halmazon vett integrálra.

Legyen $H \subset \mathbb{R}^N$ egy tetszőleges korlátos halmaz, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Mivel H korlátos, ezért létezik olyan $I \in \mathcal{I}$ halmaz, amely tartalmazza H -t, azaz amelyre $H \subset I$. (Két dimenzióban jól látszik, hogy egy korlátos halmaz mindig befoglalható egy téglalapba pl.)



Terjesszük ki az f függvényt a H halmazról I -re a következő módon:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in H; \\ 0, & \text{ha } x \in I \setminus H. \end{cases}$$

1.23 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény integrálható (Riemann-értelmenben), ha $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható I -n, azaz $\tilde{f} \in R(I)$.

Megmutatható, hogy $\int_I \tilde{f}$ értéke független az $I \in \mathcal{I}$ megválasztásától: bármely H -t tartalmazó $I \in \mathcal{I}$ halmaz esetén ugyanazt az értéket kapjuk. Ezért értelmes a következő definíció.

1.24 Definíció. Az $\int_I \tilde{f}$ számot az f függvény H -n vett integráljának nevezzük. Jelölése: $\int_H f$.

Megmutatható, hogy az $R(I)$ 1.–9. tulajdonságai $R(H)$ -n is érvényesek. Ezek bizonyítása nem bonyolult. Pl.

$$\int_H (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \int_I (\lambda_1 \tilde{f} + \lambda_2 \tilde{g}) = \lambda_1 \int_I \tilde{f} + \lambda_2 \int_I \tilde{g} = \lambda_1 \int_H f + \lambda_2 \int_H g.$$

1.4. A Riemann-féle integrál kiszámítása

Ebben a fejezetben kétváltozós függvények Riemann-integráljának a kiszámításával (kettős integrál) foglalkozunk. (A gyakorlati órákon lesznek példák hármas integrálra is.) A Riemann-féle integrál kiszámítása akkor a legegyszerűbb, ha a függvény intervallumon (téglalap) van értelmezve.

1.4.1. Riemann-integrál intervallumon

Legyen $H = [a, b] \times [c, d] \in \mathcal{I}_0$.

1.25 Állítás. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ és $f \in R(H)$. Tegyük fel, hogy minden rögzített $x \in [a, b]$ esetén az

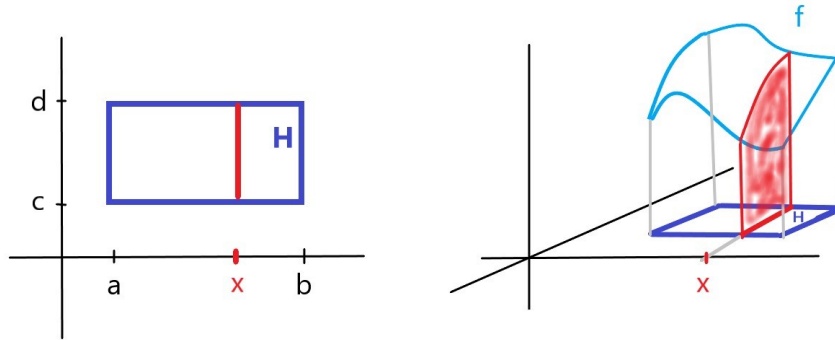
$$y \mapsto f(x, y), \quad y \in [c, d]$$

egyváltozós függvény Riemann-integrálható $[c, d]$ -n. Jelölje

$$\tilde{I}(x) := \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b].$$

Ekkor $\tilde{I} \in R[a, b]$, és $\int_a^b \tilde{I}(x) dx = \int_H f$. Tehát

$$\int_H f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

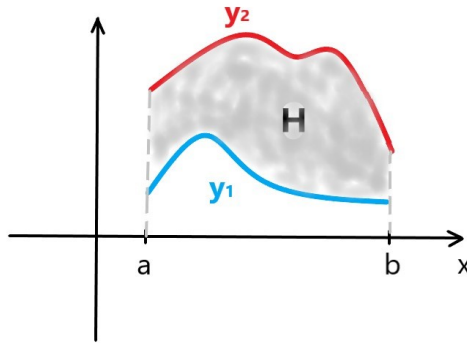


1.4.2. Riemann-integrál normáltartományon

Ebben a szakaszban az intervallumnál általánosabb halmaztípussal foglalkozunk. Tekintsük $\mathbb{R}^2$ -ben a következő speciális halmazt. Ha $y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekre $y_1(x) \leq y_2(x) \forall x \in [a, b]$, akkor jelölje H a következő $\mathbb{R}^2$ -beli halmazt:

$$H := \{(x, y) : x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$

Az ilyen H halmazt (az x -tengelyre vonatkozó) normáltartománynak nevezzük. Hasonlóan értelmezhető a normáltartomány az y tengelyre vonatkozóan: ekkor a halmazt alkotó pontok két, y -tól függő folytonos függvény grafikonja közé esnek.



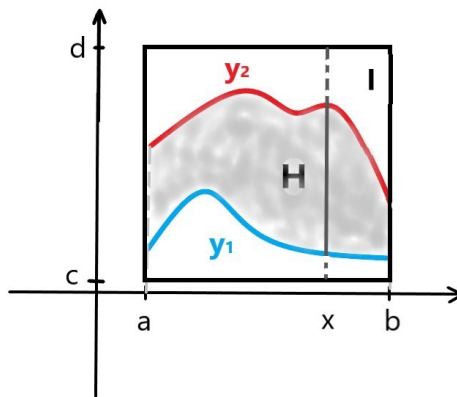
1.26 Állítás. Legyen H a fenti normáltartomány, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, és $f \in R(H)$. Tegyük fel, hogy minden rögzített $x \in [a, b]$ esetén az $y \mapsto f(x, y)$, $y \in [y_1(x), y_2(x)]$ függvény Riemann-integrálható, azaz $\forall x \in [a, b]$ esetén létezik az

$$\tilde{I}(x) := \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

integrál. Ekkor $\tilde{I} \in R[a, b]$, és $\int_a^b \tilde{I}(x) dx = \int_H f$.

Biz.: Tegyük fel, hogy H -t az $I = [a, b] \times [c, d]$ intervallumba foglaltuk bele.

$$\begin{aligned} \int_H f &= \int_I \tilde{f} = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{y_1(x)} 0 dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d 0 dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \tilde{I}(x) dx. \end{aligned}$$



1.27 Megjegyzés. *Körön és egyéb speciális halmazokon érdemes lehet változótranszformációt alkalmazni (lásd gyakorlaton).*

2. Alakzatokhoz kötődő integrálfogalmak

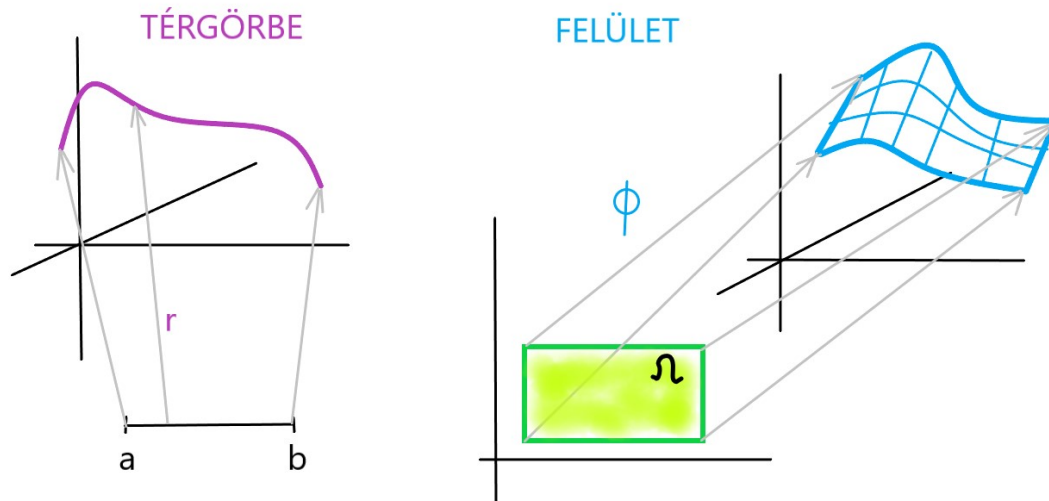
A fizikai alkalmazásokban fontosak a különböző térbeli alakzatokhoz (térgörbe, felület) kötődő integrálfogalmak. A térgörbéhez kötődő legfontosabb integrálfogalomról, a vonalintegrálról a Matematika 2 tantárgy anyagában már tanultunk. Felülethez kötődő integrálfogalmakról viszont még nem esett szó.

A térgörbét úgy definiáltuk, mint egy $\mathbb{R}$ -beli intervallumon értelmezett $\mathbb{R}^3$ -ba képező folytonos függvényt:

2.1 Definíció. (Emlék.) Egy $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ képező folytonos függvényt térgörbének nevezünk.

A most definiálandó **felület** pedig egy $\mathbb{R}^2$ -beli összefüggő halmazon (általában téglalapon) értelmezett $\mathbb{R}^3$ -ba képező folytonos függvényként értelmezhető:

2.2 Definíció. Egy $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ képező folytonos függvényt felületnek nevezünk, ha $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő halmaz.



A lényeg tehát, hogy a térgörbe **egyváltozós**, a felület pedig **kétváltozós** függvény segítségével adható meg. A pontos definíció szerint magát ezt a függvényt (r ill. Φ) nevezzük térgörbének / felületnek, és nem azt az $\mathbb{R}^3$ -beli ponthalmazt, amely az alakzatot alkotja. (Ez r ill. Φ értékkészlete.) Látni fogjuk, hogy az új integrálfogalmakat az alakzat értelmezési tartományán vett Riemann-integrálokként értelmezzük.

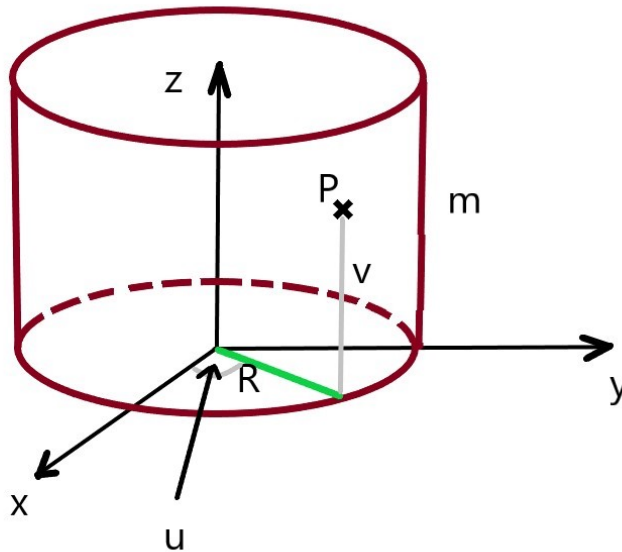
Sok esetben az alakzat $\mathbb{R}^3$ -beli ponthalmazként van megadva (azaz valójában az érték-készletét ismerjük), és nekünk kell megkeresnünk a hozzá tartozó függvényt. Ezt az eljárást paraméterezésnek, a függvény értelmezési tartományát pedig paraméterhalmaznak nevezzük.

2.1. Felület paraméterezése

Legyen adva egy $F \subset \mathbb{R}^3$ ponthalmaz a térben. Olyan $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényt keresünk, amelyre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő halmaz, és $R(\Phi) = F$.

Megjegyezzük, hogy Ω leggyakrabban $\mathbb{R}^2$ -beli intervallum, azaz $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ típusú halmaz.

Példa. Tekintsük annak a hengernek a palástját, amelynek alapja a 0 középpontú R sugarú kör, és magassága m . A palást bármely pontjának megadásához elegendő két adat, pl. a pont xy síkra eső vetületének az x tengellyel bezárt szöge (jelölje u), valamint a pont magassága (jelölje v).

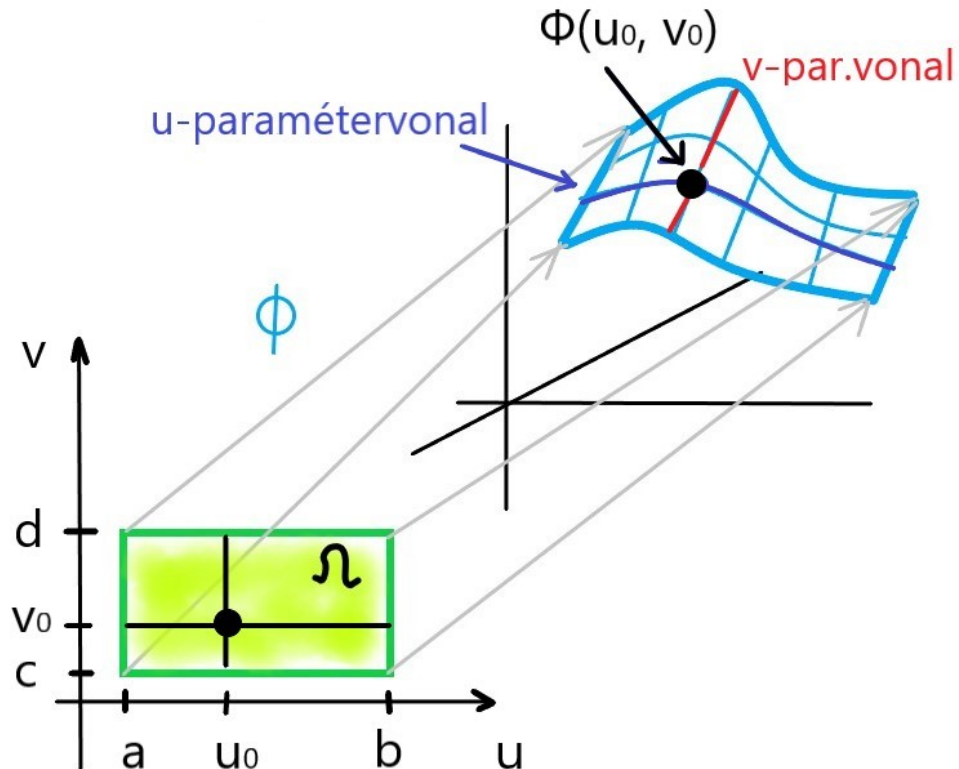


Ha u 0 és 2π között változhat, v pedig 0 és m között, akkor minden (u, v) paraméterpárnak megfelel a palást egy pontja. Azaz most legyen $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, m]$, és a paraméterező függvény (vagyis maga a felület)

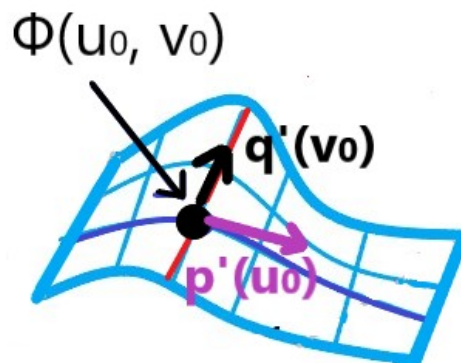
$$\Phi(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, m].$$

A térgörbékhez hasonlóan egy felületnek is adható irányítás. (Ez alól csak bizonyos speciális felületek kivételek, amelyek nem irányíthatók. Az irányíthatóság pontos definícióját

itt nem tisztázzuk.) A felületnél az irányítás valamelyik irányú normálvektor (a felületre merőleges vektor) kiválasztását jelenti. Nézzük meg, hogyan írhatunk fel normálvektort a felület egy pontjához! Legyen $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy sima (azaz folytonosan differenciálható) felület, $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, és $(u_0, v_0) \in \Omega$. A $p : \mathbb{R} \supset \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p(u) = \Phi(u, v_0)$, $u \in [a, b]$ függvényt a $\Phi(u_0, v_0)$ ponton átmenő u -paramétervonalnak, a $q : \mathbb{R} \supset \rightarrow \mathbb{R}^3$, $q(v) = \Phi(u_0, v)$, $v \in [c, d]$ függvényt pedig a $\Phi(u_0, v_0)$ ponton átmenő v -paramétervonalnak nevezzük (ezek térgörbék, amelyek képpontjai a felületen vannak).



Tudjuk, hogy $p'(u_0)$ és $q'(v_0)$ az u - és v -paramétervonal érintővektorai a $\Phi(u_0, v_0)$ pontban.



A felületre merőleges vektort kaphatunk pl. úgy, hogy ezen két érintővektornak képezzük a vektoriális szorzatát.

Emlékeztető: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térvektorok $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelölt vektoriális szorzata az $\underline{a}$ térvektor, amely mind $\underline{a}$ -ra, mind pedig $\underline{b}$ -re merőleges úgy, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ jobbsodrású rendszert alkot, nagysága pedig egyenlő az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor által kifeszített paralelogramma területével.

Ez alapján $\underline{n}_1 := p'(u_0) \times q'(v_0)$ a felület $\Phi(u_0, v_0)$ pontjához tartozó érintősíkjának egy normálvektora lesz. Természetesen az $\underline{n}_2 := q'(v_0) \times p'(u_0)$ vektor is normálvektor. Nyilvánvalóan, $\underline{n}_2 = -\underline{n}_1$, és az egyik kiválasztása jelenti a felület irányítását. Ennek a vektorértékű függvények felületi integráljának a kiszámításánál lesz jelentősége. Zárt felületnél megállapodás szerint mindig a kifelé mutató normálvektort választjuk.

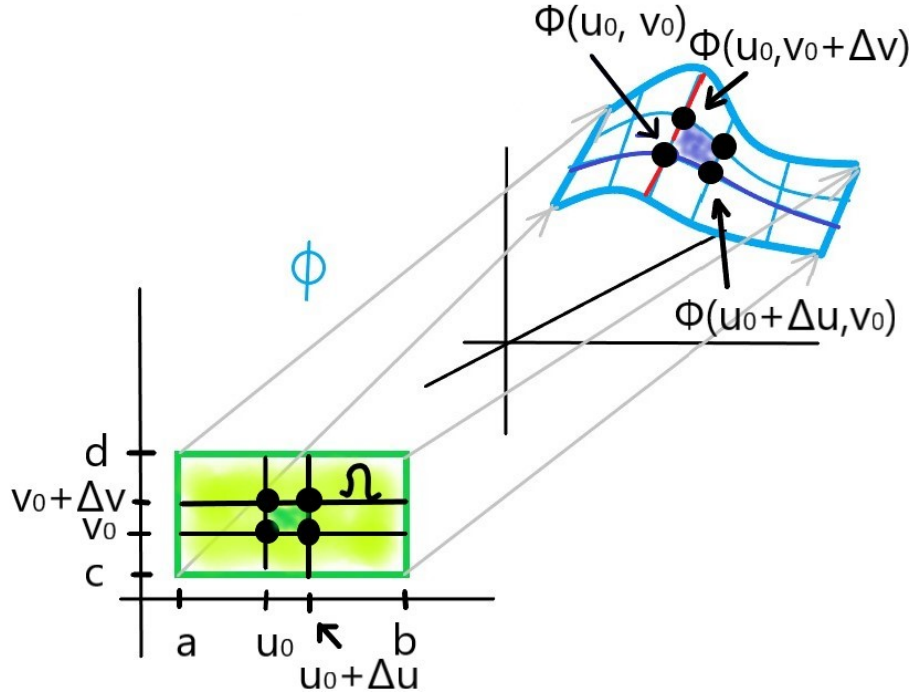
2.2. Felszínszámítás

Mielőtt rátérünk a felületekhez kötődő integrálfogalmak tárgyalására, érdemes szót ejteni egy felület felszínének a kiszámításáról. Az itt leírtakra szükségünk lesz a felülethez kötődő integrálfogalmak értelmezéséhez.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ egy intervallum, $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy sima felület, és $(u_0, v_0) \in \Omega$. A Φ függvény $\mathbb{R}^3$ -ba képez, ezért jellemezhető három koordinátafüggvénnyel, jelölje ezeket X, Y és Z , azaz

$$\Phi(u, v) = \begin{bmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{bmatrix}.$$

Az X, Y és Z függvények $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ képeznek. Tekintsük a Φ értelmezési tartományában, azaz Ω -ban az (u_0, v_0) , $(u_0 + \Delta u, v_0)$, $(u_0, v_0 + \Delta v)$ és $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ csúcspontokkal jellemezhető téglalapot. Ennek területe $\Delta u \cdot \Delta v$. Írjuk fel először ezen kis cella képének a felszínét!



Ha Δu és Δv elég kicsi, akkor a kis cella képének felszíne közelítőleg egy paralelogramma területe. Ezt a paralelogrammát a következő különbségvektorok feszítik ki: $\Phi(u_0 + \Delta u, v_0) - \Phi(u_0, v_0)$ és $\Phi(u_0, v_0 + \Delta v) - \Phi(u_0, v_0)$. Jelölje ezeket $\underline{a}$ és $\underline{b}$. Korábban bevezettük az u - és v -paramétervonal fogalmát ($p(u)$ és $q(v)$), ezek segítségével is felírhatjuk ezeket a különbségvektorokat. A térgörbe mentén vett megváltozás a deriváltvektor és a független változó megváltozásának a szorzatával közelíthető. Ebből

$$\underline{a} = \Phi(u_0 + \Delta u, v_0) - \Phi(u_0, v_0) = p(u_0 + \Delta u) - p(u_0) \approx p'(u_0) \cdot \Delta u$$

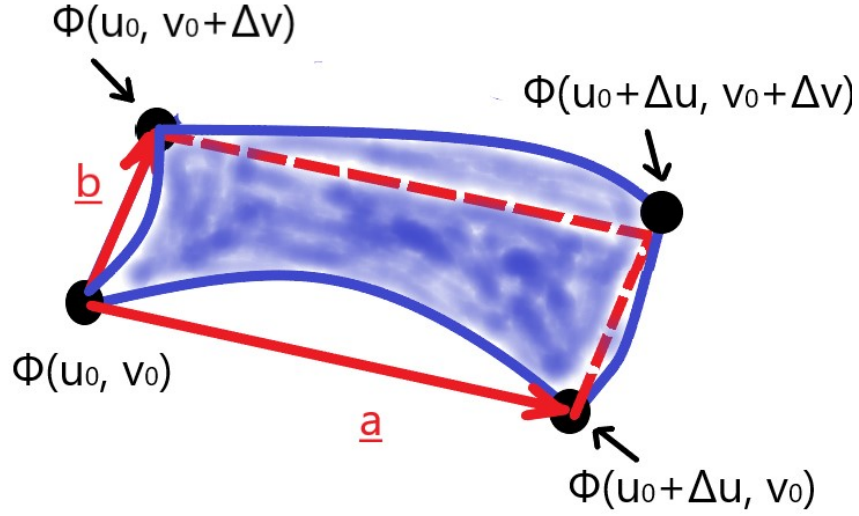
és

$$\underline{b} = \Phi(u_0, v_0 + \Delta v) - \Phi(u_0, v_0) = q(v_0 + \Delta v) - q(v_0) \approx q'(v_0) \cdot \Delta v.$$

A kapott paralelogramma területe az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoriális szorzat hossza², vagyis

$$\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \|(p'(u_0) \cdot \Delta u) \times (q'(v_0) \cdot \Delta v)\| = \|p'(u_0) \times q'(v_0)\| \cdot \Delta u \Delta v.$$

²Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ térvektor hosszán az $\|\underline{a}\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ számot értjük.



A kék görbevonallú cellaelem felülete jól közelíthető a piros paralelogramma területével, ha Δu és Δv elég kicsi. A piros paralelogramma területe $\|\underline{a} \times \underline{b}\|$.

Ugyanezt más alakban is felírhatjuk, a paramétervonalak helyett magával a Φ függvénnyel kifejezve, a következő módon. Mivel

$$p(u) = \Phi(u, v_0) = \begin{bmatrix} X(u, v_0) \\ Y(u, v_0) \\ Z(u, v_0) \end{bmatrix},$$

ezért

$$p'(u_0) = \begin{bmatrix} \partial_u X(u_0, v_0) \\ \partial_u Y(u_0, v_0) \\ \partial_u Z(u_0, v_0) \end{bmatrix} =: \partial_u \Phi(u_0, v_0).$$

(A jobb oldalon bevezetett $\partial_u \Phi(u_0, v_0)$ szimbólum csak jelölés, hiszen Φ vektorértékű függvény, így parciális deriváltja nem értelmezhető, itt a koordináta-függvényeinek a parciális deriváltjait tartalmazó vektorra alkalmaztuk ezt a jelölést.) Hasonlóan,

$$q'(v_0) = \begin{bmatrix} \partial_v X(u_0, v_0) \\ \partial_v Y(u_0, v_0) \\ \partial_v Z(u_0, v_0) \end{bmatrix} =: \partial_v \Phi(u_0, v_0).$$

Ezzel a felületen lévő görbevonallú cella területe közelítőleg

$$T' \approx \|\partial_u \Phi(u_0, v_0) \times \partial_v \Phi(u_0, v_0)\| \Delta u \cdot \Delta v.$$

Ebből már természetes módon adódik a felület teljes területének a kiszámítása: osszuk fel Ω -t az u és v tengellyel párhuzamos egyenesekkel, amelyek egymástól való távolsága Δu ill. Δv , és metszéspontjai az (u_i, v_j) pontok, $i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J$. Ezzel $\Delta u \cdot \Delta v$ területű cellákra daraboltuk a paraméterhalmazt. Egy cella képe a Φ felületen egy görbevonaltú cella, amelynek a felszínét már fel tudjuk írni:

$$T'_{ij} \approx \|\partial_u \Phi(u_i, v_j) \times \partial_v \Phi(u_i, v_j)\| \Delta u \cdot \Delta v.$$

Ha ezeket a területeket összegezzük, akkor a Φ felület felszínének egy közelítését kapjuk:

$$\sum_i \sum_j T'_{ij} = \sum_i \sum_j \|\partial_u \Phi(u_i, v_j) \times \partial_v \Phi(u_i, v_j)\| \Delta u \cdot \Delta v.$$

Ez nem más, mint a

$$S := \int_{\Omega} \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\| du dv$$

kétdimenziós Riemann-integrál egy közelítőösszege. Az S integrált a Φ felület felszínének nevezzük. Az S képletében az integrálandó függvényt könnyebben kezelhető alakra hozhatjuk, ha felhasználjuk az alábbi, tetszőleges $\underline{a}, \underline{b}$ térvektorokra fennálló összefüggést, ahol γ jelölje az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor egymással bezárt szögét:

$$\begin{aligned} \|\underline{a} \times \underline{b}\|^2 &= \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 \cdot \sin^2 \gamma = \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \gamma) = \\ &= \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 \cos^2 \gamma = \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - (\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle)^2. \end{aligned}$$

Ez alapján

$$S = \int_{\Omega} \sqrt{\|\partial_u \Phi\|^2 \cdot \|\partial_v \Phi\|^2 - (\langle \partial_u \Phi, \partial_v \Phi \rangle)^2} du dv.$$

Ha a paramétervonalak merőlegesek egymásra (ami igen gyakori!), akkor $\langle \partial_u \Phi, \partial_v \Phi \rangle = 0$ minden pontban, így ez a tag eltűnik. Ekkor tehát S képlete az

$$S = \int_{\Omega} \sqrt{\|\partial_u \Phi\|^2 \cdot \|\partial_v \Phi\|^2} du dv = \int_{\Omega} \|\partial_u \Phi\| \cdot \|\partial_v \Phi\| du dv$$

alakra egyszerűsödik.

2.3. Felszíni integrál

(Ezzel az integrálfogalommal órán nem foglalkozunk!) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő halmaz, $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima felület. Tegyük fel, hogy a felület minden pontjához hozzárendeltünk egy valós számot, azaz legyen $g : \mathbb{R}^3 \supset \rightarrow \mathbb{R}$, $D(g) := \Phi(\Omega)$. Tegyük fel, hogy g folytonos.

A g skalárfüggvény Φ felületre vett felszíni integrálját a következőképpen értelmezzük:

1. Az Ω halmazt $\Delta u \cdot \Delta v$ területű cellákra osztjuk az u - és v -tengellyel párhuzamos egyenesekkel, amelyek metszéspontjai az (u_i, v_j) pontok, $i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J$.
2. Megszorozzuk g értékét az (u_i, v_j) -nek megfelelő felületi pontban az $(u_i, v_j), (u_i + \Delta u, v_j), (u_i, v_j + \Delta v), (u_i + \Delta u, v_j + \Delta v)$ sarokpontú cella képének a közelítő területével:

$$g(\Phi(u_i, v_j)) \cdot \|\partial_u \Phi_{i,j} \times \partial_v \Phi_{i,j}\| \cdot \Delta u \Delta v.$$

3. Összegezzük ezeket valamennyi cellára:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J g(\Phi(u_i, v_j)) \cdot \|\partial_u \Phi_{i,j} \times \partial_v \Phi_{i,j}\| \cdot \Delta u \Delta v.$$

4. Ha $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$, akkor ezen összeg a következő integrálhoz tart:

$$\int_{\Omega} g(\Phi(u, v)) \cdot \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\| du dv.$$

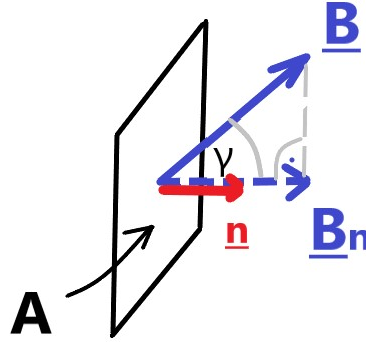
A fenti integrált a g skalármező Φ felületre vett felszíni integráljának nevezzük, és $\int_{\Phi} g$ -vel jelöljük.

Alkalmazás: Ezt a típusú integrált alkalmazzuk pl. arra, hogy egy lemez tömegeloszlásából (egységnyi felületre eső tömeg, amely a lemezen pontról pontra változhat) kiszámítsuk a lemez teljes tömegét.

2.4. Felületi integrál

Ennek az integrálfogalomnak az elnevezése hasonlít az előzőre, de nem ugyanazt jelenti. (A felszíni integrálnál skalár értékű, itt pedig vektor értékű függvényt integrálunk!) A felületi integrál egyik alkalmazása a mágneses fluxus kiszámítása. Ezért idézzük fel, hogy mit tanultunk középiskolában a mágneses fluxusról! Jelölje $\underline{B}$ a mágneses indukciót (vektormennyiség). Síkfelület-darabon és állandó $\underline{B}$ esetén a fluxust a következőképpen értelmeztük, ha A a felületdarab felszíne, és $\underline{n}$ a felületre merőleges, egységnyi hosszúságú vektor (normálvektor):

$$\Psi = B_n \cdot A = \langle \underline{B}, \underline{n} \rangle \cdot A = \langle \underline{B}, A \cdot \underline{n} \rangle.$$



Az $A \cdot \underline{n}$ vektor a felületre merőleges, és nagysága az A terület. Nevezzük ezt felszínvektornak. Kérdés: miképpen értelmezzük a fluxust, ha nem síklap a felület, valamint esetleg $\underline{B}$ sem állandó, hanem pontról pontra változik?

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ intervallum, $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima felület. Tegyük fel, hogy a felület minden pontjához hozzárendeltünk egy vektort, azaz legyen $f : \mathbb{R}^3 \supset \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D(f) \supset R(\Phi)$. (Képzeld úgy, hogy minden pontban hat valamilyen mágneses indukcióvektor, ezt fejezi ki f .) Tegyük fel, hogy f folytonos. Az f vektorértékű függvény Φ felületre vett felületi integrálját a következőképpen értelmezzük:

1. Az Ω halmazt $\Delta u \cdot \Delta v$ területű cellákra osztjuk az u - és v -tengellyel párhuzamos egyenesekkel, amelyek metszéspontjai az (u_i, v_j) pontok, $i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J$.
2. Képezzük az $f(\Phi(u_i, v_j))$ vektort az (u_i, v_j) pontokban.
3. A $\Phi(u_i, v_j)$ ponthoz tartozó érintősík normálvektora $\partial_u \Phi(u_i, v_j) \times \partial_v \Phi(u_i, v_j)$. A

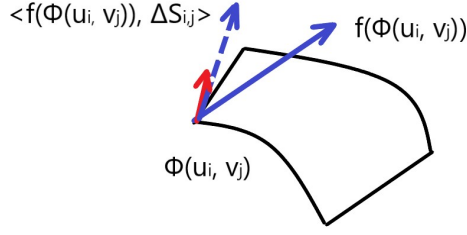
$$\underline{\Delta S}_{i,j} := (\partial_u \Phi(u_i, v_j) \times \partial_v \Phi(u_i, v_j)) \Delta u \Delta v$$

vektort a $\Phi(u_i, v_j)$ ponthoz tartozó felszínvektornak nevezzük. ($\underline{\Delta S}_{i,j}$ hossza a felületelem területe, iránya merőleges a felületre, a $p'(u_i), q'(v_j)$ vektorokkal jobbsodrású rendszert alkot.)

4. Minden (u_i, v_j) pontban képezzük a következő skaláris szorzatot:

$$\langle f(\Phi(u_i, v_j)), \underline{\Delta S}_{i,j} \rangle.$$

Ez közelítőleg nem más, mint az $f(\Phi(u_i, v_j))$ vektor felületre merőleges komponensének a nagysága szorozva a felületelem területével, vagyis a „fluxus a görbevonallú cellára”, a $\langle \underline{B}, A \cdot \underline{n} \rangle$ vektor megfelelője a kis felületdarabkán.



5. Összegezzük minden cellára:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \langle f(\Phi(u_i, v_j)), \underline{\Delta S}_{i,j} \rangle.$$

6. Ez éppen a következő kétdimenziós Riemann-integrál közelítőösszege:

$$\int_{\Omega} \langle f(\Phi(u, v)), \partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v) \rangle du dv.$$

Ezt a számot nevezzük az f vektormező Φ felületre vett felületi integráljának, és $\int_{\Phi} f$ -fel jelöljük.

2.3 Megjegyzés. Az $\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)$ vektoriális szorzatban a tényezők sorrendjét úgy kell megválasztani, hogy megfeleljen a felület irányításának. Ha zárt a felület, akkor kifelé mutasson. (Ha nem zárt, akkor vagy a feladatban előírják, vagy mi magunk választjuk meg tetszés szerint.)

2.4 Megjegyzés. Ha f minden pontban egyállású a felszínvektorral, és nagysága ugyanaz a c konstans, akkor

$$\begin{aligned} \int_{\phi} f &= \int_{\Omega} \langle f(\Phi(u, v)), \partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v) \rangle du dv = \\ &= \int_{\Omega} \|f(\Phi(u, v))\| \cdot \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\| du dv = c \int_{\Omega} \|\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)\| du dv = c \cdot S, \end{aligned}$$

azaz a vektor c nagyságát megszorozzuk a felület teljes felszínével.

2.5. Integrálátalakító tételek

A valós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-formulát általánosítjuk. Ismeretes, hogy ha az $f : \mathbb{R} \supset \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a),$$

azaz a függvény deriváltjának az integrálja f -nek a halmaz határán való megváltozásával egyenlő.

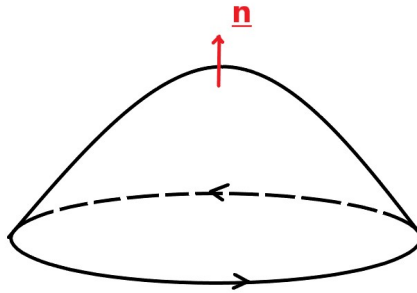
Az egyik általánosítás: Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima felület, amelyet egy $r : \mathbb{R} \supset \rightarrow \mathbb{R}^3$ irányított görbe határol (a felszínvektorok irányából nézve r pozitív irányítású legyen).

2.5 Tétel. (Stokes-tétel)

Ha $f : \mathbb{R}^3 \supset \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima vektormező, akkor

$$\int_{\Phi} \operatorname{rot} f = \int_r f,$$

azaz a $\operatorname{rot} f$ (az f -re alkalmaztunk egy differenciáloperátort) felületi integrálja egyenlő a felület határán az f vonalintegráljával. A rotáció fizikai jelentéséről megjegyezzük, hogy sebességmező esetén egy adott pontban azt mutatja meg, hogy milyen irányú és erősségű forgómozgást végez az éppen ott lévő légréteg.



A másik általánosítás: Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset \rightarrow \mathbb{R}^3$ zárt, sima felület, amely egy $V \subset \mathbb{R}^3$ térrészt vesz körül (a felszínvektorokat kifelé irányítjuk).

2.6 Tétel. (Gauss–Ostrogradszkij-tétel)

Ha $f : \mathbb{R}^3 \supset \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima vektormező, akkor

$$\int_V \operatorname{div} f = \int_{\Phi} f,$$

azaz a V tértartományon integrálva a $\operatorname{div} f$ függvényt³ (egy másik differenciáloperátort alkalmaztunk az f -re), ez az integrál a térrész határán vett felületi integrálba megy át.

³Az $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \supset \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező divergenciája: $\operatorname{div} f(x, y, z) := \partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3$ (skalármező).

3. Függvénysorozatok

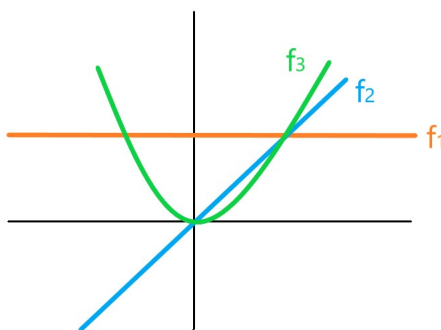
A függvénysorozat fogalmát a számsorozat mintájára definiálhatjuk. Emlékezzünk, hogy számsorozatnak az olyan függvényt neveztük, amely minden természetes számhoz hozzárendel egy valós számot. A függvénysorozat ennek megfelelően olyan függvényt jelent, amely minden természetes számhoz egy függvényt rendel hozzá. Legyenek $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvények, ahol $n = 1, 2, \dots$. Feltesszük, hogy ezen végtelen sok függvény értelmezési tartományának metszete nem üres, vagyis $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n) \neq \emptyset$.

3.1 Definíció. Az

$$n \mapsto f_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

módon definiált függvényt A -n értelmezett (valós) függvénysorozatnak nevezzük. Jelölés: (f_n) .

Pl. Legyen $f_n(x) = x^{n-1}$, $D(f_n) = \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. A függvénysorozat első három elemét ábrázoltuk:



Egy függvénysorozattal kapcsolatban a bennünket érdeklő legfontosabb tulajdonság a konvergencia. A számsorozatoktól eltérően itt többféle konvergenciafogalmat is használunk.

3.1. Pontonkénti konvergencia

3.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat konvergens az $x_0 \in A$ pontban, ha az $(f_n(x_0))$ valós számsorozat konvergens.

Pl. az $(x^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat az $x_0 = 0,5$ pontban konvergens, hiszen itt $f_n(x_0) = (\frac{1}{2})^{n-1}$, és ez egy nullához tartó számsorozat. Az $x_0 = 3$ pontban viszont nem konvergens (azaz divergens), mert ekkor $f_n(x_0) = 3^{n-1} \rightarrow +\infty$.

3.3 Definíció. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens az $A_1 \subset A$ halmazon, ha minden $x_0 \in A_1$ pontban konvergens.

Pl. az $(x^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat pontonként konvergens az $A_1 = [0, 1]$ halmazon. A továbbiakban $B \subset A$ jelöli azt a legbővebb halmazt, amelyen az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens.

3.4 Definíció. A

$$B := \{x \in A : (f_n(x)) \text{ konvergens}\}$$

halmazt az (f_n) függvénysorozat konvergenciahalmazának nevezzük.

Pl. az $(x^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat konvergenciahalmaza $B = (-1, 1]$.

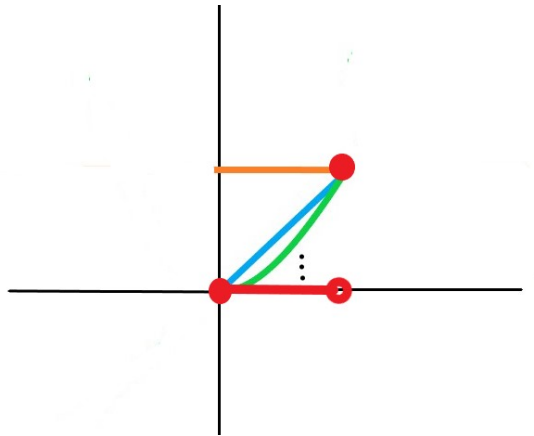
Tehát ha (f_n) konvergens B -n, akkor $\forall x_0 \in B$ esetén az $(f_n(x_0))$ $\mathbb{R}$ -beli számsorozat konvergens, azaz létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$. Jelölje f azt a $B \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyik mindegyik $x \in B$ ponthoz ezt a határértéket rendeli hozzá, azaz

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in B.$$

3.5 Definíció. A fenti módon definiált f függvényt az (f_n) sorozat határfüggvényének nevezzük. Jelölés: $f_n \xrightarrow{B} f$.

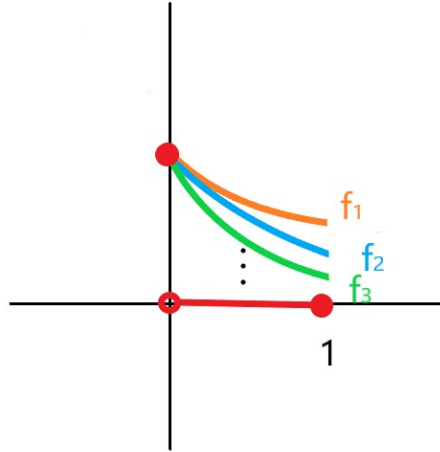
Pl. 1. Legyen $f_n(x) = x^{n-1}$, $D(f_n) = [0, 1]$. Ekkor $B = [0, 1]$, és

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [0, 1); \\ 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$



Pl. 2. Legyen $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $D(f_n) = [0, 1]$. Ekkor $B = [0, 1]$, és a határfüggvény (az ábrán pirossal)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (0, 1]; \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$



A függvénysorozatok vizsgálatában az egyik legfontosabb kérdés az, hogy a függvénysorozat egyes elemeinek, vagyis az f_n függvényeknek a különféle tulajdonságai átöröklődnek-e a határfüggvényre. Például, igaz-e, hogy ha minden n esetén f_n folytonos az $x_0 \in B$ pontban, akkor f is folytonos x_0 -ban? A fenti 1. és 2. példa azt mutatja, hogy nem. Tehát

$$f_n \in C(B), \forall n \in \mathbb{N} \text{ és } f_n \xrightarrow{B} f \not\Rightarrow f \in C(B).$$

Nézzünk egy példát, amelyben az integrálhatóságot vizsgáljuk.

Pl. 3. Legyen $D(f_n) = [0, 1]$, és

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ az első } n \text{ racionális szám;} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = D(x)$. Ezért $f_n \in [0, 1]$ minden n -re, ugyanakkor $f \notin R[0, 1]$. Így

$$f_n \in R[a, b] \forall n \in \mathbb{N}, f_n \xrightarrow{[a, b]} f \not\Rightarrow f \in R[a, b].$$

A továbbiakban olyan új konvergenciafogalmat adunk meg, amely mellett a fenti átöröklődési tulajdonságok érvényesek lesznek.

3.2. Egyenletes konvergencia

Tegyük fel, hogy az (f_n) függvénysorozat a $B \subset A$ halmazon pontonként tart az $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ határfüggvényhez, azaz $f_n \xrightarrow{B} f$. A definíció értelmében ez azt jelenti, hogy minden $x \in B$ esetén az $(f_n(x))$ valós számsorozat tart az $f(x) \in \mathbb{R}$ számhoz. Átfogalmazva: minden $x \in B$ esetén $\forall \varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, amelyre $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$ esetén. Az N küszöbindex, amelyet egy ε értékhez adhatunk, függhet az x

ponttól. Amennyiben azonban tetszőleges ε -hoz x -től független N küszöbindex is adható, akkor egyenletes konvergenciáról beszélünk.

3.6 Definíció. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat a $C \subset A$ halmazon egyenletesen tart az $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ határfüggvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, amelyre $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N$ és $\forall x \in C$ esetén. Jelölés: $f_n \xrightarrow{e} f$.

Nyilvánvalóan, ha egy (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál egy f függvényhez a C halmazon, akkor C minden pontjában pontonként is konvergál f -hez. Következésképpen $C \subset B$.

Hogyan ellenőrizhető az egyenletes konvergencia? Nyilván, a 3.6 definíció ekvivalens a következővel:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \sup_{x \in C} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N.$$

Másképpen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in C} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Azaz: a függvénysorozat elemeinek a határfüggvénytől vett "legnagyobb" eltérése a C halmazon tartson nullához.

Tekintsük a korábbi példákat!

Pl. 1.

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |x^{n-1} - 0| = \sup_{x \in [0,1]} x^{n-1} = 1$$

(Itt a jobb oldali végpontot kivettük a $[0, 1]$ intervallumból, mert ebben a pontban az összes f_n függvénynek az f határfüggvénytől való eltérése nulla, és kihasználtuk, hogy a maradék halmazon a határfüggvény mindenhol nullát vesz fel.) Tehát nem egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ -en! Legyen most $C = [0, 1 - \delta]$, ahol $\delta \in (0, 1)$ rögzített szám. Ekkor

$$\sup_{x \in C} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in C} x^{n-1} = \max_{x \in C} x^{n-1} = (1 - \delta)^{n-1}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \delta)^{n-1} = 0$, ezért a $C = [0, 1 - \delta]$ halmazon a függvénysorozat már egyenletesen konvergens.

Pl. 2. Vegyük észre, hogy az $x_n = \frac{1}{n}$ pontban

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1 + nx_n} = \frac{1}{2},$$

és $\frac{1}{n} \in [0, 1]$. Ezért

$$\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}.$$

Márpedig egy olyan számsorozat, amelynek minden eleme nagyobb, vagy egyenlő $\frac{1}{2}$ -del, nem tarthat nullához, így nem egyenletesen konvergens a függvénysorozat.

Pl. 3. $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\rightarrow 0$, így itt sem egyenletesen a konvergencia.

A fenti példák azt mutatják, hogy a folytonosság megőrzéséhez az egyenletes konvergencia nem szükséges, de elégséges lehet. A következő állítás azt mutatja, hogy ez valóban így van.

3.7 Állítás. *Tegyük fel, hogy $f_n \xrightarrow{C} f$, és f_n folytonos az $x_0 \in C$ pontban minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor f is folytonos x_0 -ban.*

Biz.: Az egyenletes konvergencia miatt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N \text{ és } \forall x \in C.$$

Így $n := N$ megválasztással igaz a következő:

$$|f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in C.$$

Legyen $x \in C$ tetszőleges. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség értelmében

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|.$$

Mivel $x, x_0 \in C$, ezért a fentiekből

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(x_0)|$$

következik. A feltétel alapján f_N folytonos x_0 -ban, ami azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in K_\delta(x_0) \cap D(f_N) \text{ esetén } |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ezért

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in K_\delta(x_0) \cap D(f) \text{ esetén } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

és ez éppen az f függvény x_0 -beli folytonosságát jelenti.

Mivel egy függvény folytonossága egy halmazon azt jelenti, hogy a halmaz minden pontjában folytonos, így a fenti állításból azonnal adódik az alábbi

3.8 Következmény. *Legyen $H \subset B$, $f_n \xrightarrow{C} f$, és $f_n \in C(H) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor $f \in C(H)$.*

Tekintsük most bizonyítás nélkül az integrálhatóságra és a differenciálhatóságra vonatkozó állításokat! Vegyük észre, hogy a differenciálhatóságnál nem az a feltétel, hogy

(f_n) egyenletesen konvergens legyen, hanem (f_n) pontonkénti konvergenciája mellett az (f'_n) deriváltfüggvények sorozatának az egyenletes konvergenciája biztosítja a tulajdonság átöröklődését a határfüggvényre.

3.9 Állítás. Tegyük fel, hogy $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ és $f_n \in R[a, b] \forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $f \in R[a, b]$;
- $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$.

3.10 Állítás. Tegyük fel, hogy $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$, $f'_n \xrightarrow{[a,b]} g$ és $f_n \in C^1[a, b] \forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $f \in C^1[a, b]$;
- $f' = g$ (tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$.)

4. Függvénysorok

A függvénysor fogalmát is a valós számsorral analóg módon vezetjük be. Legyenek $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(A \subset \mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$ adott függvények. Tekintsük az (f_n) függvénysorozatot, és képezzük belőle az (s_n) új függvénysorozatot, ahol $s_n := f_1 + f_2 + \dots + f_n$. Az s_n függvényt a függvénysor n -edik részletösszegfüggvényének nevezzük.

4.1 Definíció. Az $((f_n), (s_n))$ rendezett párt az (f_n) függvénysorozathoz tartozó függvénysornak nevezzük. Jelölés: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ vagy $\sum f_n$.

4.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor (pontonként) konvergens az $A_1 \subset A$ halmazon, ha az (s_n) függvénysorozat pontonként konvergens A_1 -en.

4.3 Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor abszolút konvergens (a.k.) az $x_0 \in A$ pontban, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ nemnegatív tagú sor konvergens. Azt mondjuk, hogy a függvénysor abszolút konvergens az $A_1 \subset A$ halmazon, ha minden $x \in A_1$ pontban abszolút konvergens.

4.4 Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens a $C \subset A$ halmazon, ha az (s_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens C -n.

4.5 Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen abszolút (e.a.) konvergens, ha a $\sum |f_n|$ függvénysor egyenletesen konvergens.

4.6 Definíció. Azon $x \in A$ pontok összességét, amelyekre a függvénysor konvergens, a függvénysor konvergenciahalmazának nevezzük. Jelölje a konvergenciahalmazt B .

4.7 Definíció. Tegyük fel, hogy a $\sum f_n$ függvénysor konvergens az f függvényhez B -n, azaz létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) =: f(x)$ minden $x \in B$. Az így definiált $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a $\sum f_n$ függvénysor összegfüggvényének nevezzük.

Jelölés: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$.

(Ebben a fejezetben tehát f végig a függvénysor összegfüggvényét és nem az (f_n) függvénsorozat határfüggvényét fogja jelenteni.)

4.8 Megjegyzés. Az indexelést nem mindig 1-gyel kezdjük.

Példa. Legyen $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, ahol a_n, x_0 adottak. Ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

függvénsort hatványsornak nevezzük. A hatványsorok konvergenciájával később külön foglalkozunk.

4.1. Az összegfüggvény tulajdonságai

4.9 Állítás. Tegyük fel, hogy a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens valamely $I \subset \mathbb{R}$ halmazon. Ekkor, ha az f_n függvények folytonosak az $x_0 \in I$ pontban, akkor f is folytonos x_0 -ban.

4.10 Következmény. Tegyük fel, hogy $\sum f_n$ egyenletesen konvergens az f összegfüggvényhez az $I \subset \mathbb{R}$ halmazon, és $f_n \in C(I) \forall k \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor $f \in C(I)$.

4.11 Állítás. Tegyük fel, hogy a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen tart az f függvényhez az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, és $f_n \in R(I)$ minden n indexre. Ekkor $f \in R(I)$, és

$$\int_I f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n.$$

Ez az állítás azt fejezi ki, hogy egyenletes konvergencia esetén tagonként integrálhatjuk a függvénsort.

A differenciálhatóság átöröklődésére más feltétel vonatkozik:

4.12 Állítás. Tegyük fel, hogy a $\sum f_n$ függvénysor pontonként tart az f függvényhez az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, $f_n \in C^1(I)$ minden n indexre, továbbá a $\sum f'_n$ függvénysor egyenletesen tart I -n a g függvényhez. Ekkor $f \in C^1(I)$, és $f' = g$. (Tehát $(\sum f_n)' = \sum f'_n$.)

Az utóbbi egyenlőség szerint egy függvénysort tagonként deriválhatunk, ha teljesülnek a fenti feltételek.

Biz.: Mindhárom tétel bizonyítása a következő tulajdonságon alapul: a $\sum f_k$ függvénysor tagjainak tulajdonsága (folytonosság, integrálhatóság, differenciálhatóság) automatikusan átöröklődik a véges számú tagját tartalmazó s_n részletösszegeire.

Kérdés: hogyan mutatható meg közvetlenül az f_n függvények vizsgálatával az egyenletes konvergencia?

4.13 Állítás. (Weierstrass tétele) Legyenek $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre

- $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in C \subset A;$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor konvergens.

Ekkor a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens és egyenletesen abszolút konvergens a $C \subset A$ halmazon.

A Weierstrass-tétel egy elégséges feltételt ad. Ugyanakkor, ha ezzel eldönthető az egyenletes konvergencia, akkor az abszolút egyenletes konvergencia is teljesül.

Pl. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx$ függvénysor egyenletesen (és egyenletesen abszolút) konvergens az egész $\mathbb{R}$ -en, mert a Weierstrass-tétel alapján

$$\left| \frac{1}{n^2} \sin nx \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},$$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

4.2. Hatványsorok konvergenciája

Tekintsük a

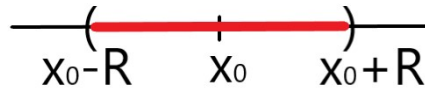
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

hatványsort, ahol $a_k, x_0 \in \mathbb{R}$. (A futóindexet kényelmi okokból n -ről k -ra cseréltük.) Az a_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ számokat a hatványsor együtthatóinak, az x_0 pontot pedig a hatványsor középpontjának nevezzük. (Elnevezés: x_0 középpontú hatványsor.)

Mi lehet a hatványsor konvergenciahalmaza? Látható, hogy az x helyébe x_0 -t helyettesítve konvergens sort kapunk, hiszen az összegben az első kivételével minden tag nulla (a sor összege a_0 lesz). Megmutatható, hogy egy hatványsor konvergenciahalmaza mindig egy x_0 középpontú intervallum. Erről szól a következő állítás.

4.14 Állítás. (Cauchy–Hadamard-tétel)

Tegyük fel, hogy létezik az $r := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ határérték. Ekkor az $R = \frac{1}{r}$ jelöléssel a hatványsor konvergens (sőt, abszolút konvergens) a $K_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R)$ intervallumon, és divergens az $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R] = \mathbb{R} \setminus \overline{K_R(x_0)}$ halmazon. (Az intervallum két határpontjáról általános esetben nem tudunk semmit sem mondani.)



4.15 Definíció. Az $R = \frac{1}{r} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ értéket a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy ha a fenti limesz nem létezik, akkor is érvényes R -re egy hasonló képlet.

4.16 Megjegyzés. Ha $r = 0$, akkor $R = +\infty$ (tehát a hatványsor az egész $\mathbb{R}$ -en konvergens), ha pedig $r = +\infty$, akkor $R = 0$ (csak x_0 -ban konvergens a hatványsor).

Vajon a konvergencia egyenletes is? Tegyük fel, hogy a hatványsor konvergenciasugara R , és $R_0 \in (0, R)$ egy rögzített szám. Ekkor $\forall x \in \overline{K_{R_0}(x_0)}$ esetén

$$|a_k(x - x_0)^k| \leq |a_k|R_0^k.$$

A jobb oldalon szereplő tagokkal felírt $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|R_0^k$ számsor konvergens, így a Weierstrass-tétel alapján $\overline{K_{R_0}(x_0)}$ -on a hatványsor egyenletesen (és egyenletesen abszolút) konvergens. Tehát az $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervallum minden zárt intervallumrészén egyenletesen konvergens a hatványsor. (Az egész $(x_0 - R, x_0 + R)$ -en azonban nem biztos.)

4.17 Következmény. Egy hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmazán belüli tetszőleges zárt intervallumon mindig folytonos, és ezen a halmazon a hatványsort tagonként integrálhatjuk.

Kérdés: tagonként deriválhatjuk-e a hatványsort? Ehhez elégséges a $\sum f'_k$ függvény-sor egyenletes konvergenciája, ahol $f'_k(x) = k a_k \cdot (x - x_0)^{k-1}$. Írjuk fel a $\sum f'_k$ függvény-sor konvergenciasugarát!

$$\tilde{R} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k a_k|}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{1 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = R,$$

ami azt mutatja, hogy $\sum f'_k$ ugyanazon a $K_R(x_0)$ halmazon konvergens, mint az eredeti hatványsor. Így ismét tetszőleges $R_0 \in (0, R)$ esetén

$$|f'_k(x)| = |a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}| \leq |a_k \cdot k \cdot R_0^{k-1}| \quad \forall x \in \overline{K_{R_0}(x_0)}.$$

Mivel $x_0 + R_0$ -ban abszolút konvergens a $\sum f'_k$ függvénysor, ezért a jobb oldali tagokkal felírt $\sum |a_k \cdot k \cdot R_0^{k-1}|$ számsor konvergens, így a Weierstrass-tétel értelmében $\sum f'_k$ egyenletesen konvergens $\overline{K_{R_0}(x_0)}$ -on.

Mivel minden $x \in K_R(x_0)$ pont befoglalható olyan $\overline{K_{R_0}(x_0)}$ halmazba, amelyen egyenletesen konvergens a $\sum f'_k$ függvénysor, így a $\sum f_k$ hatványsor minden $x \in K_R(x_0)$ pontban tagonként differenciálható. Tehát

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in K_R(x_0).$$

Ez szintén differenciálható $K_R(x_0)$ -on, és

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2}.$$

Ennek a konvergenciasugara szintén R , és így tovább. Az eredeti hatványsor összegfüggvényének n -edik deriváltja is létezik $K_R(x_0)$ -on, és az nem más, mint

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k+1-n)a_k(x-x_0)^{k-n}.$$

Vegyük észre, hogy általánosan az n -edik deriváltat az $x = x_0$ pontban véve

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1) \cdots 1 \cdot a_n = a_n \cdot n!.$$

A hatványsor n -edik együtthatója tehát kifejezhető

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

alakban. Tehát ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor konvergens, és összegfüggvénye f , akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \forall x \in K_R(x_0).$$

4.2.1. Taylor-sor

Eddig a hatványsorokat és azok összegfüggvényét tanulmányoztuk. A gyakorlatban a hatványsorok alkalmazása rendszerint úgy merül fel, hogy adva van egy f függvény, és szeretnénk előállítani hatványsor összegfüggvényeként. Legyen pl. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Tudunk-e mondani olyan hatványsort, amelynek az összegfüggvénye éppen ez az f függvény?

4.18 Definíció. Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez egy $x_0 \in D(f)$ pont $K_R(x_0)$ környezetében megadható olyan x_0 középpontú hatványsor, amely konvergens, és összegfüggvénye f , akkor f -et x_0 -ban analitikus függvénynek nevezzük.

Kérdés: mi annak a feltétele, hogy egy f függvény x_0 -ban analitikus legyen?

Triviálisan szükséges feltétel, hogy f x_0 -ban akárhányszor differenciálható legyen. (Ugyanis ha f analitikus x_0 -ban, akkor valamely $K_R(x_0)$ környezeten előáll

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

alakban. Itt viszont a jobb oldal akárhányszor differenciálható x_0 -ban, ezért a bal oldalon álló f függvénynek is annak kell lennie. Így például az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény biztosan nem analitikus az $x_0 = 0$ pontban (más pontban azonban lehet, hogy analitikus)!

Tegyük fel, hogy f akárhányszor differenciálható x_0 -ban. Tekintsük a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

hatványsort, amely ekkor létezik, hiszen az összes $f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, \dots$ derivált létezik a feltevésünk szerint.

4.19 Definíció. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 -ban akárhányszor differenciálható függvényhez felírt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ hatványsort az f függvény x_0 körüli Taylor-sorának nevezzük. Ezen sor véges, n -edik részletösszegét az f függvény x_0 körüli n -ed fokú Taylor-polinomjának nevezzük. Jelölés:

$$T_n(f(x), x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Tehát a Taylor-sor olyan hatványsor, amelyet egy adott függvényhez a fenti képlet szerint készítünk el. A következő állítás azt mutatja meg, hogy pontosan ez az a hatványsor, amely előállítja f -et.

4.20 Állítás. Ha f analitikus x_0 -ban, akkor a hatványsor, amely előállítja, nem más, mint a Taylor-sora.

Biz.: Tegyük fel, hogy f analitikus x_0 -ban, azaz $\exists K_R(x_0)$ -on egy olyan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ sor, amelynek összegfüggvénye f . Ekkor viszont

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

azaz a sor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

alakú, és ez éppen f x_0 -beli Taylor-sora. Más (szintén x_0 középponttal felírt) hatványsor tehát nem állíthatja elő.

Pl. Mi a nulla körüli Taylor-sora az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvénynek? A mértani sorról tanultakból tudjuk, hogy

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \text{ ha } x \in (-1, 1).$$

Ez egy 0 középpontú hatványsor, amely előállítja f -et a 0 egy környezetében, így nem lehet más, mint f Taylor-sora. (Ellenőrizhető, hogy a 0-beli deriváltak kiszámításával felírva f Taylor-sorát ugyanerre a függvénysorra fogunk jutni.)

Ezen megfigyelés segítségével átfogalmazható az analitikusság.

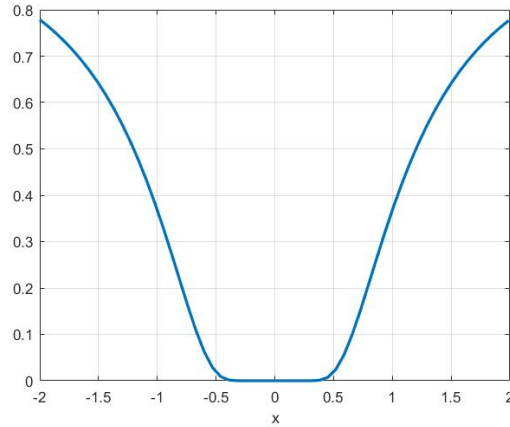
4.21 Definíció. Egy x_0 -ban akárhányszor differenciálható függvényt x_0 -ban Taylor-sorba fejthetőnek nevezünk, ha f Taylor-sora valamely $K_R(x_0)$ környezeten konvergens, és összegfüggvénye f .

4.22 Következmény. Egy f függvény pontosan akkor analitikus x_0 -ban, ha x_0 -ban Taylor-sorba fejthető.

Vizsgáljuk meg, mi a feltétele annak, hogy egy f függvény x_0 -ban Taylor-sorba fejthető legyen! Az, hogy f x_0 -ban végtelen sokszor differenciálható, csak szükséges, de nem elégséges ehhez. Ugyanis pl. az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényre ellenőrizhető, hogy az $x_0 = 0$ pontban az összes deriváltja nulla, azaz $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots$. Így a 0 körüli Taylor sora $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} (x-0)^k = 0$, tehát a Taylor-sorának az összegfüggvénye nem a fenti f függvény, hanem az azonosan nulla függvény (amely csak a 0-ban veszi fel ugyanazt az értéket, mint f).



Az $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ függvény grafikonja

A szükséges és elégséges feltétel megadásához vezessük be az

$$R_k(x) := f(x) - T_k(f(x), x_0)$$

jelölést. Nyilvánvalóan f pontosan akkor lesz Taylor-sorba fejthető x_0 -ban, ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(x) = 0 \quad \forall x \in K_R(x_0).$$

4.23 Állítás. (A Taylor-sor Lagrange-féle maradéktagja)

Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -szer folytonosan differenciálható x_0 egy $K(x_0)$ környezetében. Ekkor ezen környezet minden x pontjához létezik olyan ξ szám x és x_0 között, amely mellett

$$f(x) - T_k(f(x), x_0) = R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

Ha tehát a jobb oldali maradéktagról meg tudjuk mutatni, hogy $k \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart, akkor f Taylor-sorba fejthető (azaz analitikus) x_0 -ban, egyébként nem az.

Mivel egy analitikus függvényre a fenti R_k maradéktag $k \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart, így elég nagy k -t választva $T_k(f(x), x_0)$, vagyis f x_0 körüli k -ad fokú Taylor-polinomja közel halad magához az f függvényhez, azaz f -et jól tudjuk közelíteni polinommal. Fontos, hogy az x_0 körüli Taylor-polinommal való közelítést csak x_0 kis környezetében használjuk, a maradéktag ugyanis x_0 -tól távoli x -ekre már nagy lehet, ezt mutatja a maradéktagban az $(x - x_0)^{k+1}$ tényező. Ezt az alábbi ábrán is megfigyelhetjük az $f(x) = \sin x$ függvény példáján, amelyhez ábráztuk az $x_0 = 1$ körüli első-, másod- és harmadfokú Taylor-

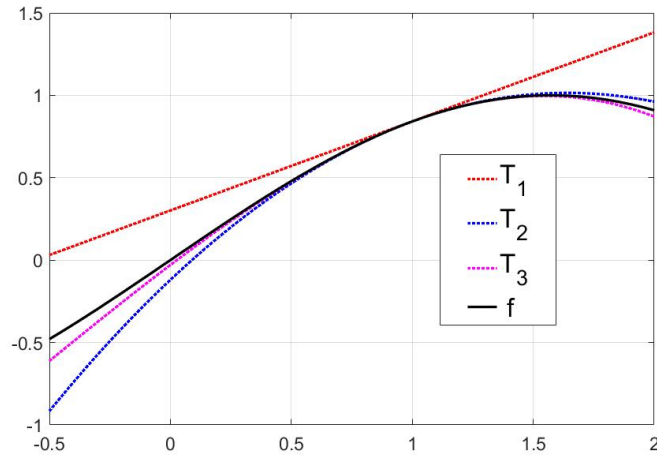
polinomját, vagyis az alábbi három függvényt:

$$T_1(\sin x, 1) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1),$$

$$T_2(\sin x, 1) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2,$$

$$T_3(\sin x, 1) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3,$$

ahol $f(1) = \sin(1)$, $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(1) = \cos 1$, $f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(1) = -\sin 1$ és $f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(1) = -\cos 1$. A fokszám növelésével a közelítés egyre javul, de az $x_0 = 1$ ponttól távoli x helyeken már nagy eltérés van az f és a Taylor-polinomjai között.



Az $f(x) = \sin x$ függvény és $x_0 = 1$ pont körüli első-, másod-, valamint harmadfokú Taylor-polinomja.

5. Trigonometrikus sorok

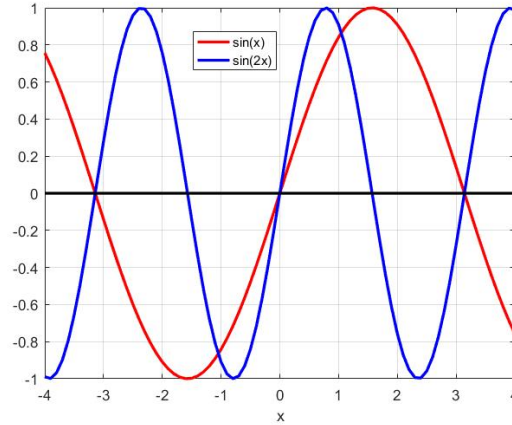
Legyenek $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots$ adott számok.

5.1 Definíció. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

függvényt sorot trigonometrikus függvénytornak nevezzük.

A trigonometrikus függvénytornban tehát különböző hullámszámú szinusz- és koszinusz-függvényeket adunk össze. Az alábbi ábrán feltüntettük a $\sin x$ és a kétszeres hullámszámú (azaz feleakkora hullámhosszú) $\sin 2x$ függvény grafikonját. A $\sin kx$ függvény hullámhossza a 2π k -ad része. A $\cos$ függvényre hasonlóan...



Vegyük észre, hogy mivel $\sin 0 = 0$, így a $k = 0$ -hoz tartozó $b_k = b_0$ együtthatójú tag nem szerepel az összegben, így az összeg felírható

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

alakban is.

Tegyük fel, hogy (1) konvergens a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, és összegfüggvénye f . Tehát

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Láttuk, hogy egy hatványsornál az ott használt a_k együtthatók és f között szoros kapcsolat volt ($a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$). Itt is érdekes kérdés, hogy vajon van-e kapcsolat az (1) sorban szereplő a_k, b_k együtthatók és f között. Megmutatjuk, hogy ha (1) egyenletesen konvergens, akkor közvetlen kapcsolat van közöttük, az együtthatókat ki tudjuk fejezni f segítségével. Tegyük fel tehát, hogy (1) egyenletesen konvergál f -hez, és integráljuk az

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2)$$

egyenlőség mindkét oldalát a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Kihasználva, hogy az egyenletes konvergencia miatt tagonként integrálhatunk a sorban, az eredmény

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right).$$

A jobb oldalon a $\cos kx$ és $\sin kx$ függvények k minden előforduló értékére olyan 2π szerint periodikus függvények, amelyek integrálja 0, így az integrálokat tartalmazó végtelen sok

tag eltűnik, és 2π -vel osztva az

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (3)$$

összefüggésre jutunk. Az a_0 együttható tehát nem más, mint f integrálközepe a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

A további együtthatók meghatározásához szorozzuk meg (2) mindkét oldalát a $\sin nx$ függvénnyel ($n = 1, 2, \dots$), és ezután integráljuk a $[-\pi, \pi]$ -n. (Megmutatható, hogy a $\sin nx$ függvénnyel való szorzás után is egyenletes marad a konvergencia, ezért ismét tagonként integrálhatunk.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx \right)$$

A koszinusz- és szinuszfüggvények jobb oldalon szereplő szorzatintegráljai nevezetes integrálok:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx &= 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{Z} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx &= 0, \quad \text{ha } k \neq n \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx &= \pi, \quad \text{ha } k = n (\neq 0). \end{aligned}$$

Mindezek figyelembe vételével

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = b_n \pi,$$

amiből

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Hasonlóan, $\cos nx$ -szel szorozva

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Összegezve: ha egy trigonometrikus függvénysor egyenletesen konvergál az f összegfüggvényhez, akkor a függvénysor együtthatóira a (3), (4), (5) összefüggések érvényesek.

5.1. Fourier-sorok

Eddig a trigonometrikus sorokat és azok összegfüggvényét tanulmányoztuk. A gyakorlatban a trigonometrikus sorok alkalmazása rendszerint úgy merül fel, hogy adva van egy f függvény, amely értelmezve van a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, és szeretnénk előállítani trigonometrikus sor összegfüggvényeként. Legyen pl. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $D(f) = [-\pi, \pi]$. Tudunk-e mondani olyan trigonometrikus sort, amelynek az összegfüggvénye éppen ez az f függvény? Más szóval, össze tudjuk-e rakni ezt az f függvényt különböző hullámszámú szinusz- és koszinuszfüggvényekből?

Vegyük észre, hogy a trigonometrikus sorban összeadott $a_k \cos kx$ ill. $b_k \sin kx$ függvények nemcsak a $[-\pi, \pi]$ -n vannak értelmezve, hanem az egész $\mathbb{R}$ -en, és 2π szerint periodikusak (tetszőleges x helyen ugyanazt az értéket veszik fel, mint $x + m \cdot 2\pi$ helyen, ahol $m \in \mathbb{Z}$). Így, amennyiben létezik, az összegfüggvény is értelmezhető az egész $\mathbb{R}$ -en, és 2π szerint periodikus lesz. Tehát egy egész $\mathbb{R}$ -en értelmezett f függvényt csak akkor van reményünk összerakni trigonometrikus függvényekből, ha f 2π szerint periodikus. (Pl. az egész $\mathbb{R}$ -en értelmezett $f(x) = |x|$ függvényt biztosan nem lehet így előállítani.) A továbbiakban így f -ről vagy azt tesszük fel, hogy a $[-\pi, \pi]$ -n van értelmezve, vagy azt, hogy az egész $\mathbb{R}$ -en értelmezett, 2π szerint periodikus függvény.

Láttuk, hogy ha a trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, akkor a sor együtthatói a (3), (4) és (5) képletek szerint számolhatók a sor összegfüggvényéből. Vegyük észre, hogy ezek a képletek bármely olyan f függvényre értelmesek, amely integrálható a $[-\pi, \pi]$ -n.

5.2 Definíció. *Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ -n. Ekkor az (3), (4) és (5) megválasztású (1) alakú trigonometrikus sort az f függvény Fourier-sorának nevezzük.*

A Fourier-sor és a trigonometrikus sor tehát hasonló kapcsolatban van egymással, mint a Taylor-sor és a hatványsor. Egy f függvény Fourier-sora az a trigonometrikus sor, amelynek az együtthatóit f -ből a (3), (4) és (5) képletek szerint számoljuk ki.

Alapkérdések:

1. Igaz-e, hogy f Fourier-sora előállítja az f függvényt, illetve mely f függvényekre igaz ez?
2. Ha egy x_0 pontban nem $f(x_0)$ -hoz tart a Fourier-sor, akkor hová tart?
3. Jellemezhető-e a Fourier-sor konvergenciája?

A továbbiakban ezekre a kérdésekre térünk ki.

Ehhez szükségünk lesz néhány fontos fogalomra.

5.3 Definíció. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont $\delta > 0$ sugarú kipontozott környezetén az $K_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ halmazt értjük.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ egy halmaz.

5.4 Definíció. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontot a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha x_0 minden kipontozott környezete tartalmaz H -beli pontot. A H halmaz torlódási pontjainak halmazát a H' szimbólummal jelöljük.

Vegyük észre, hogy egy H halmaz x_0 torlódási pontja lehet H -n kívüli pont is. Pl. a $H = (0, 1)$ intervallum torlódási pontjai a H -beli pontok, valamint a két végpont, amelyek nincsenek benne H -ban. Tehát most $H' = [0, 1]$.

5.5 Definíció. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont δ sugarú jobb oldali környezetén a

$$K_\delta^+(x_0) := (x_0, x_0 + \delta)$$

halmazt értjük.

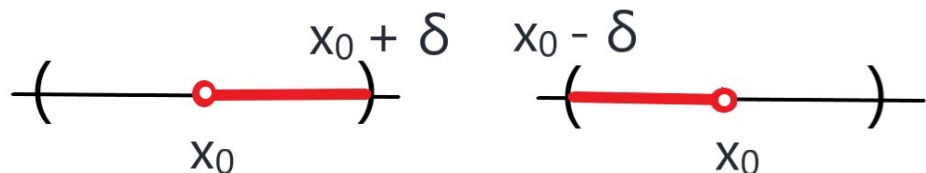
5.6 Definíció. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont δ sugarú bal oldali környezetén a

$$K_\delta^-(x_0) := (x_0 - \delta, x_0)$$

halmazt értjük.

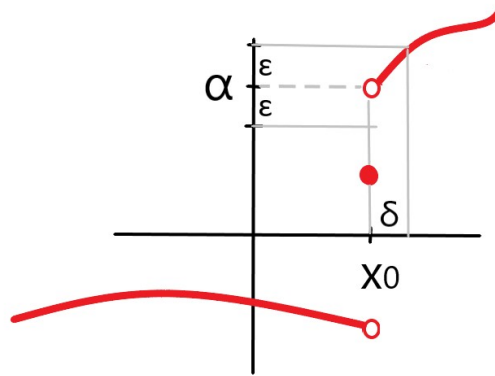
jobb oldali környezet:

bal oldali környezet:



5.7 Definíció. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontot a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz jobb oldali (bal oldali) torlódási pontjának nevezzük, ha x_0 minden jobb oldali (bal oldali) környezete tartalmaz H -beli pontot. A H halmaz jobb/bal oldali torlódási pontjainak halmazát a H'_+ ill H'_- szimbólummal jelöljük.

5.8 Definíció. Azt mondjuk, hogy a függvénynek létezik jobb oldali határértéke az $x_0 \in (D(f))'_+$ pontban, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ szám, amelyre minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\forall x \in K_\delta^+(x_0) \cap D(f)$ pontra $f(x) \in K_\varepsilon(\alpha)$. Ekkor az α számot az f függvény x_0 -beli jobb oldali határértékének nevezzük. Jelölése: $f(x_0 + 0)$ vagy $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

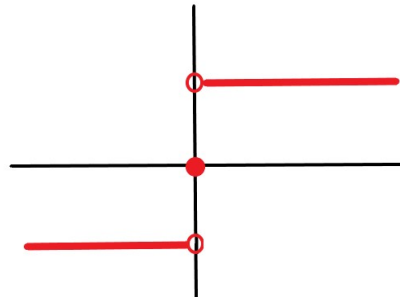


A jobb oldali határérték szemléltetése

5.9 Definíció. Azt mondjuk, hogy a függvénynek létezik bal oldali határértéke az $x_0 \in (D(f))'_-$ pontban, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ szám, amelyre minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\forall x \in K_\delta^-(x_0) \cap D(f)$ pontra $f(x) \in K_\varepsilon(\alpha)$. Ekkor az α számot az f függvény x_0 -beli bal oldali határértékének nevezzük. Jelölése: $f(x_0 - 0)$ vagy $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

Például az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvénynek (előjelfüggvény) az $x_0 = 0$ pontban nem létezik határértéke, azonban létezik mind jobb, mind bal oldali határértéke ebben a pontban:

$$f(x_0 + 0) = f(0 + 0) = 1; \quad f(x_0 - 0) = f(0 - 0) = -1.$$



Vegyük észre, hogy ha x_0 -nak van bal és jobb oldali környezete is $D(f)$ -ben, és f -nek létezik határértéke x_0 -ban, akkor ez egyben a függvény jobb és bal oldali határértéke is

x_0 -ban. Továbbá, ha f folytonos x_0 -ban, akkor is ez az eset áll elő, sőt ekkor speciálisan a határérték, a jobb oldali határérték és a bal oldali határérték is $f(x_0)$, vagyis az x_0 -beli helyettesítési érték lesz.

Szükségünk lesz még a bal és jobb oldali derivált fogalmára.

5.10 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik jobb oldali deriváltja az $x_0 \in (D(f))'_+$ pontban, ha létezik és véges a következő határérték:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0+0)}{x - x_0}.$$

Jelölése: $f'_+(x_0)$.

5.11 Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik bal oldali deriváltja az $x_0 \in (D(f))'_-$ pontban, ha létezik és véges a következő határérték:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0-0)}{x - x_0}.$$

Jelölése: $f'_-(x_0)$.

Pl. az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvényre az $x_0 = 0$ pontban

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0+0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1 - 1}{x} = 0,$$

és

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0-0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-1 - (-1)}{x} = 0.$$

Vegyük észre, hogy ha f differenciálható x_0 -ban, akkor a jobb és bal oldali deriváltja is létezik x_0 -ban, és mindkettő egyenlő f x_0 -beli deriváltjával, azaz $f'(x_0)$ -al.

Jelölje egy $x_0 \in (D(f))'_+ \cup (D(f))'_-$ pontban S_0 az x_0 -beli jobb és bal oldali határérték számtani közepét, azaz legyen

$$S_0 := \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

5.12 Állítás. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, és Riemann-integrálható a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, továbbá f -nek x_0 -ban létezik jobb és bal oldali deriváltja. Ekkor f Fourier-sorának összege az x_0 pontban S_0 .

5.13 Következmény. Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor Fourier-sora x_0 -ban előállítja f -et, azaz Fourier-sorának összege x_0 -ban $f(x_0)$.

(Ugyanis mivel f differenciálható x_0 -ban, így létezik a jobb és bal oldali deriváltja is x_0 -ban, ugyanakkor mivel f folytonos x_0 -ban (hiszen ott differenciálható), így Fourier-sorának összege $f(x_0)$.)

5.2. Páros és páratlan függvények Fourier-sora

Legyen I egy, a 0-ra szimmetrikus intervallum. (Pl. lehet $I = [-\pi, \pi]$ vagy $I = \mathbb{R}$.)

5.14 Definíció. Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt páros függvénynek nevezzük, ha $f(-x) = f(x) \forall x \in I$.

Egy páros függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. Ilyen pl. az $f(x) = \cos x$ (sőt tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az $f(x) = \cos kx$) vagy az $f(x) = |x|$ függvény bármely, a 0-ra szimmetrikus intervallumon.

5.15 Definíció. Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt páratlan függvénynek nevezzük, ha $f(-x) = -f(x) \forall x \in I$.

Egy páratlan függvény grafikonja szimmetrikus az origóra. Ilyen pl. az $f(x) = \sin x$ (sőt tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az $f(x) = \sin kx$) vagy az $f(x) = x$ függvény bármely, a 0-ra szimmetrikus intervallumon.

5.16 Állítás. Ha $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ páros, és $f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ páratlan függvény, akkor az $f_1 \cdot f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény páratlan.

Biz.: Két függvény szorzatát pontonként értelmezzük, azaz

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \forall x \in I.$$

Mivel f_1 páros, f_2 pedig páratlan, így $f_1(-x) = f_1(x)$ és $f_2(-x) = -f_2(x) \forall x \in I$. Ebből következően minden $x \in I$ pontban

$$(f_1 \cdot f_2)(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot (-f_2(x)) = -f_1(x) \cdot f_2(x) = -(f_1 \cdot f_2)(x).$$

Hasonlóan igazolhatók a következő állítások.

5.17 Állítás. Ha $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ páros függvények, akkor az $f_1 \cdot f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény is páros.

5.18 Állítás. Ha $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ páratlan függvények, akkor az $f_1 \cdot f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény páros.

A következőkben páros és páratlan függvények $[-\pi, \pi]$ intervallumon vett Riemann-integráljáról mondunk ki hasznos állításokat.

5.19 Állítás. Ha az $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény páratlan és Riemann-integrálható $[-\pi, \pi]$ -n, akkor $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$.

5.20 Állítás. Ha az $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény páros és Riemann-integrálható $[-\pi, \pi]$ -n, akkor $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} f(x)dx$.

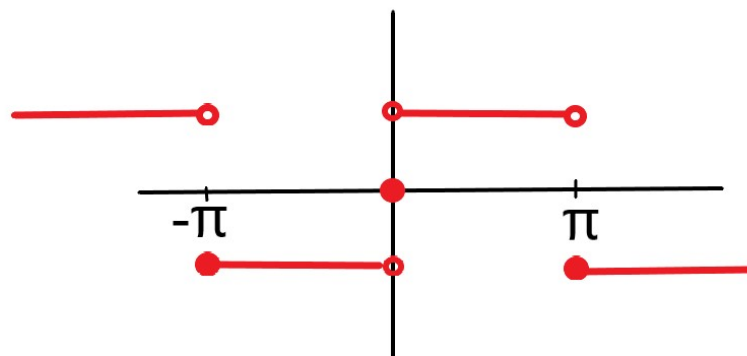
5.21 Következmény.

- Tegyük fel, hogy f páros függvény, és $f \in R[-\pi, \pi]$. Ekkor az $x \mapsto f(x) \cdot \sin kx$ függvény páratlan. $\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx = 0$, $k = 1, 2, \dots$, így f Fourier-sora tisztán koszinuszos.
- Tegyük fel, hogy f páratlan függvény, és $f \in R[-\pi, \pi]$. Ekkor az $x \mapsto f(x) \cdot \cos kx$ függvény páratlan. $\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx = 0$, $k = 1, 2, \dots$, így f Fourier-sora tisztán szinuszos.

5.3. Egy példa

Tekintsük azt az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyet a $[-\pi, \pi)$ intervallumon értelmezett sgn (előjel-) függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésével kapunk, azaz legyen

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, \text{ ha } x \in [-\pi, \pi), \text{ és } f(x + 2l\pi) = f(x) \forall l \in \mathbb{Z}.$$



a.) Írjuk fel f Fourier-sorát!

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x dx = 0$$

Az első lépésben kihasználtuk, hogy egy függvényt egy pontban megváltoztatva az integrálja ugyanaz marad, majd a második lépésben páratlan függvényt integráltunk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

A $k \neq 0$ indexű a_k együtthatók a következők lesznek:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \cos kx dx = 0,$$

hiszen a jobb oldalon ismét páratlan függvényt integrálunk.

Hátra van még a b_k , $k = 1, 2, \dots$ együtthatók meghatározása.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin kx dx.$$

Az utóbbi lépésben kihasználtuk, hogy az integrandus páros függvény. Mivel a $\operatorname{sgn} x$ függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon a nulla pont kivételével mindenhol 1-et vesz fel, így az integrálban $\operatorname{sgn} x$ helyett 1-et írhatunk. Ezzel

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos kx}{k} \right]_{x=0}^{\pi} = -\frac{2}{\pi k} (\cos k\pi - 1).$$

Figyelembe véve, hogy $\cos k\pi$ értéke váltakozva hol 1, hol -1, azaz

$$\cos k\pi = (-1)^k,$$

$$b_k = \begin{cases} -\frac{2}{\pi k}(-1 - 1) = \frac{4}{\pi k}, & \text{ha } k = 2n - 1 \\ 0, & \text{ha } k = 2n. \end{cases}$$

Ezzel a Fourier-sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin((2n-1)x) = \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin 3x + \frac{4}{5\pi} \sin 5x + \dots$$

Láthatjuk, hogy csak páratlan hullámszámú szinuszhullámokból áll a sor, és az egyre nagyobb hullámszámú (azaz egyre rövidebb hullámhosszú) komponensek egyre kisebb súllyal szerepelnek.

b.) Előállítja-e a Fourier-sor f -et

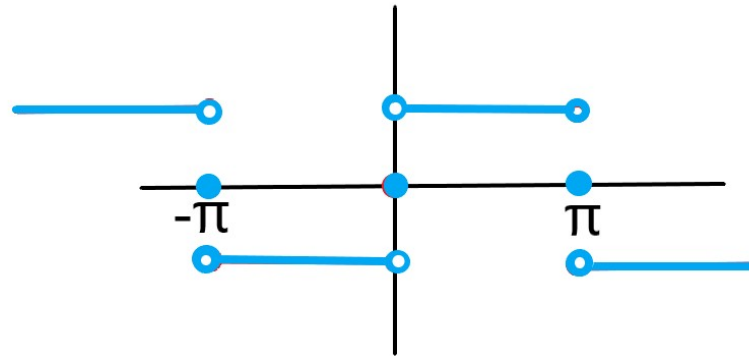
i) a $(-\pi, \pi)$ intervallumon,

ii) az egész $\mathbb{R}$ -en?

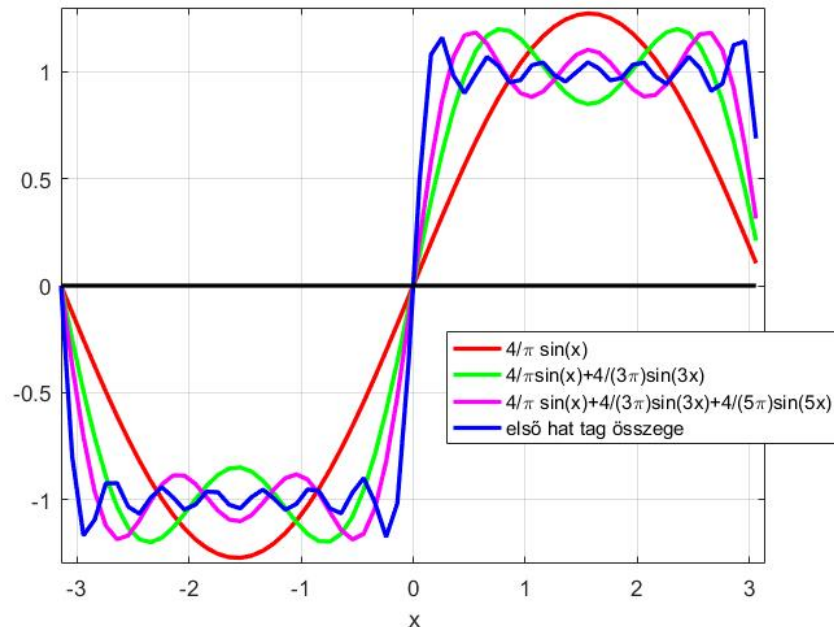
i) Mivel f -nek minden $x \in (-\pi, \pi)$ pontban létezik a bal és jobb oldali deriváltja, így a Fourier-sor minden $x \in (-\pi, \pi)$ pontban a bal és jobb oldali határérték számtani közepéhez tart. Minthogy ez minden pontban megegyezik az f függvény helyettesítési értékével,

így a Fourier-sor a $(-\pi, \pi)$ intervallumon előállítja f -et.

ii) Ha a Fourier-sort az egész $\mathbb{R}$ -en vizsgáljuk, akkor szintén minden $x \in \mathbb{R}$ pontban létezik a bal és jobb oldali deriváltja f -nek, de ez a π páratlan számú többszöröseire nem egyezik meg az f függvényértékével. Így a Fourier-sor a $(2n - 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ alakú pontokban nem állítja elő f -et, az összes többiben viszont igen. Az alábbi ábrán késsel tüntettük fel a fenti Fourier-sor összegfüggvényét. Ez, mint megfigyelhetjük, valóban csak a $(2n - 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ alakú pontokban tér el az előbbi piros grafikontól.



Az alábbi ábrán megfigyelhetjük, hogy a Fourier-sor egyre több tagot számláló részletösszeg-függvényei hogyan kerülnek egyre közelebb és közelebb ehhez a kék összegfüggvényhez.



A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy hogyan biztosítható a Fourier-sor egyenletes konvergenciája. (Ezzel a témával előadáson már nem foglalkozunk, és a vizsga anyagában sem szerepel.) Ehhez először felírjuk a Fourier-sort a kompaktabb komplex alakban.

5.4. A Fourier-sor felírása komplex alakban

Tekintsük a Fourier-sor n -edik részletösszegét:

$$s_n(f, x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (6)$$

5.22 Megjegyzés. *A fenti kifejezést n -ed rendű trigonometrikus polinomnak nevezzük, és az interpolációelméletben (elsősorban periodikus függvények interpolálására) szokásos alkalmazni.*

Mutassuk meg, hogy (6) átírható

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

alakban, ahol c_k alkalmasan megválasztott komplex együtthatók. Ismeretes az Euler-formula:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Ennek felhasználásával

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n [c_k (\cos kx + i \sin kx) + c_{-k} (\cos(-kx) + i \sin(-kx))] \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n [(c_k + c_{-k}) \cos kx + i(c_k - c_{-k}) \sin kx]. \end{aligned} \quad (7)$$

Ekkor (6) és (7) összevetésével

$$c_0 = a_0$$

$$c_k + c_{-k} = a_k$$

$$i(c_k - c_{-k}) = b_k.$$

Innen a harmadik egyenlőség i -vel való szorzásával az

$$\begin{cases} c_k + c_{-k} = a_k \\ -c_k + c_{-k} = ib_k \end{cases} \quad (8)$$

egyenletrendszerre jutunk. Ennek megoldása

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}. \quad (9)$$

Vegyük észre, hogy c_{-k} éppen a c_k komplex szám konjugáltja.

5.23 Következmény. Egy $f \in R[-\pi, \pi]$ függvény Fourier-sora felírható

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

alakban, ahol c_k (9) alakú.

Vegyük észre, hogy (4) és (5) figyelembevételével (9) átírható:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos kx - f(x)i \sin kx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i \sin kx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

(Ez az összefüggés c_{-k} -ra is érvényes.)

5.5. A Fourier-sor egyenletes konvergenciája

Jelölje $C_{2\pi}^{(m)}$ a 2π szerint periodikus, m -szer folytonosan differenciálható függvények halmazát, továbbá $c_k(f)$ az f függvény Fourier-sorában a c_k együtthatót. Ha $f \in C_{2\pi}^{(0)}$, azaz f 2π szerint periodikus folytonos függvény, akkor

$$|c_k(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \cdot |e^{-ikx}| dx.$$

Figyelembe véve, hogy $|e^{-ikx}| = 1$,

$$|c_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max_{[-\pi, \pi]} |f| dx = \frac{1}{2\pi} \max_{[-\pi, \pi]} |f| \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \max_{[-\pi, \pi]} |f|.$$

Ha $f \in C_{2\pi}^{(1)}$, akkor $k \neq 0$ esetén, parciális integrálással

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[f(x) \cdot \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{x=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{e^{-ikx}}{ik} dx.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldali első tag 0, ugyanis $f(-\pi) = f(\pi)$, és

$$\begin{aligned} [e^{-ikx}]_{x=-\pi}^{\pi} &= [\cos(-kx) + i \sin(-kx)]_{x=-\pi}^{\pi} \\ &= [\cos(kx) - i \sin(kx)]_{x=-\pi}^{\pi} = \cos(k\pi) - \cos(-k\pi) = 0. \end{aligned}$$

Ezért

$$c_k(f) = \frac{1}{2ik\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{e^{-ikx}}{ik} dx = \frac{1}{ik} c_k(f').$$

Hasonlóan, ha $f \in C_{2\pi}^{(m)}$, akkor

$$c_k(f) = \frac{1}{(ik)^m} c_k(f^{(m)}).$$

Ezért $k \neq 0$ esetén

$$|c_k(f)| = \frac{1}{|k|^m} |c_k(f^{(m)})| \leq \frac{1}{|k|^m} \cdot \max_{[-\pi, \pi]} |f^{(m)}|.$$

5.24 Állítás. Tegyük fel, hogy $m \geq 2$, és $f \in C_{2\pi}^{(m)}$. Ekkor f Fourier-sora egyenletesen (sőt, egyenletesen abszolút) konvergens $\mathbb{R}$ -en.

Biz.: Alkalmazzuk a Weierstrass-tételt!

$$|c_k(f)e^{ikx}| = |c_k(f)| \cdot |e^{ikx}| \leq \begin{cases} \frac{1}{|k|^m \max_{[-\pi, \pi]} |f^{(m)}|}, & \text{ha } k \neq 0 \\ |c_0(f)|, & \text{ha } k = 0. \end{cases}$$

A jobb oldalon pedig egy pozitív tagú, konvergens numerikus sor k . tagja van, ugyanis

$$\begin{aligned} |c_0(f)| + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{1}{|k|^m} \max_{[-\pi, \pi]} |f^{(m)}| &= |c_0(f)| + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \frac{1}{|k|^m} \max_{[-\pi, \pi]} |f^{(m)}| \\ &= |c_0(f)| + \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^m} \max_{[-\pi, \pi]} |f^{(m)}| = |c_0(f)| + 2 \max_{[-\pi, \pi]} |f^{(m)}| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^m} \\ &= |c_0(f)| + 2 \max_{[-\pi, \pi]} |f^{(m)}| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}, \end{aligned}$$

amely konvergens, ha $k \geq 2$.

5.25 Megjegyzés. Létezik olyan folytonos függvény, amelynek Fourier-sora nem konvergens a folytonossági pontban. Ugyanakkor egy speciális konstrukcióval a konvergencia,

sőt, az egyenletes konvergencia is biztosítható. Jelölje

$$\sigma_n(f, x_0) := \frac{s_0(f, x_0) + \dots + s_{n-1}(f, x_0)}{n}.$$

5.26 Állítás. (Fejér Lipót tétele)

$\sigma_n(f, x_0)$ egyenletesen tart $f(x)$ -hez, ha $f \in C_{2\pi}^{(0)}$.