

Mat3 gyakorlófeladatok 1.

1. Jelölje X az ötbetűs szavak halmazát, és legyen $d(a, b)$ annak száma, ahány betűhelyen az a és a b szó különbözik. Pl. $d(\text{'veréb'}, \text{'véreb'}) = 2$. Könnyen meggondolható, hogy ekkor (X, d) metrikus tér lesz. Melyik elemnek a legnagyobb/legkisebb a távolsága a 'banka' szótól a következő H halmazból?

$$H = \{\text{'bucka'}, \text{'bukta'}, \text{'gomba'}, \text{'bankó'}, \text{'kuckó'}, \text{'retek'}\}$$

2. Legyen X három pont a síkon, amelyeket jelöljön A, B és C , és definiáljuk $X \times X$ -en a következő d függvényt: $d(A, A) = d(B, B) = d(C, C) = 0$, $d(A, B) = d(B, A) = 1$, $d(B, C) = d(C, B) = 5$, $d(A, C) = d(C, A) = 7$. Metrikus tér-e (X, d) ?
3. Jelölje X a budapesti buszmegállók halmazát. Legyen $d(x, y)$ az a legrövidebb idő, amely alatt x megállóból y megállóba eljuthatunk autóbusszal átlagos menetidőt tekintve. Metrikát definiáltunk-e ezzel?
4. Legyen A, B, C és D négy pont a síkon, X ezen pontok halmaza, d pedig egy metrika $X \times X$ -en. Mutassuk meg, hogy

$$d(A, C) + d(B, D) \leq d(A, B) + d(B, C) + d(C, D) + d(D, A).$$

5. Metrika-e $\mathbb{R}$ -en a $d(x, y) = e^{x-y}$ függvény?
6. Adjuk meg az $x = (1, 0, -1)$ és az $y = (2, 3, 0)$ $\mathbb{R}^3$ -beli elemek távolságát a következő metrikákban: d_1, d_2, d_∞, d_d (diszkrét metrika).
7. Adjuk meg a $[0, 1]$ zárt intervallumon értelmezett $f(x) = 2x$ és $g(x) = x$ függvény távolságát a $(C[0, 1], d_\infty)$ és a $(C[0, 1], d_f)$ metrikus térben.
8. Mekkora távolságra van egymástól a $(C(0, 1), d_f)$ metrikus térben az $f(x) = x^2 - 1$ függvény és a $g(x) = 1 + x$ függvény? És a $(C(0, 1), d_\infty)$ metrikus térben?
9. Igaz-e, hogy az $f(x) = x^2$ függvény benne van az azonosan nulla függvény 1 sugarú környezetében
- a.) a $(C[-1, 1], d_f)$ metrikus térben?
- b.) a $(C[-1, 1], d_\infty)$ metrikus térben?
10. Tekintsük az 1. példabeli metrikus teret. Keressünk olyan szavakat, amelyek benne vannak a 'patak' szó 2, 3 ill. 4 sugarú környezetében. Benne van-e a 'pocok' szó a 3 sugarúban? Mi van az egységsugarú környezetben?

11. Jelölje H a $(0, 1)$ intervallum racionális pontjainak a halmazát. Adjuk meg H belső, külső, határ- és torlódási pontjainak a halmazát az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrikus térben! Nyílt-e / zárt-e H ?
12. Teljes metrikus tér-e $(H, |\cdot|)$, ahol
 - a.) $H := [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
 - b.) $H := [0, 1] \cup \{-1\}$?
13. Kontrakció-e az $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$ függvény
 - a.) a $[0, 1]$ intervallumon?
 - b.) a $[-10, -9]$ intervallumon?
 Ha igen, adjunk meg hozzá egy q kontrakciós számot.

Megoldások:

1. Legközelebbi szó: 'bankó' ($d = 1$), legtávolabbi: 'retek' ($d = 5$).
2. Nem (ugyanis $d(A, C) > d(A, B) + d(B, C)$, tehát sérül a 3. metrikatulajdonság).
3. Nem (két hely között az egyik és a másik irányban nem mindig ugyanazon az útvonalon haladnak a buszok, így egyes x és y megállók között $d(x, y) \neq d(y, x)$).
4. Adjuk össze a következő egyenlőtlenségeket, és osszuk el 2-vel, valamint használjuk fel, hogy minden tagban $d(x, y) = d(y, x)$:

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C), \quad d(A, C) \leq d(A, D) + d(D, C),$$

$$d(B, D) \leq d(B, C) + d(C, D), \quad d(B, D) \leq d(B, A) + d(A, D).$$

5. Nem, ugyanis nem teljesül, hogy

$$e^{x-y} = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(a metrika a.) tulajdonsága), hiszen $x = y \in \mathbb{R}$ esetén $d(x, y) = e^{x-y} = e^0 = 1$.

6. $d_1(x, y) = |1 - 2| + |0 - 3| + |-1 - 0| = 5$
 $d_2(x, y) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 3)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{11}$
 $d_\infty(x, y) = \max\{|1 - 2|, |0 - 3|, |-1 - 0|\} = 3$
 $d_2(x, y) = 1$
7. $d_\infty(f, g) = \max_{[0,1]} |2x - x| = \max_{[0,1]} x = 1$
 $d_f(f, g) = \int_0^1 |2x - x| dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

8. $d_f(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |(x^2 - 1) - (1 + x)| dx = \int_0^1 ((1 + x) - (x^2 - 1)) dx = \int_0^1 (2 + x - x^2) dx = [2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{13}{6}$.
 $d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [0, 1]} (1 + x - x^2 + 1) = \max_{x \in [0, 1]} (2 + x - x^2)$.
 Ez a maximum ott van, ahol a $(2 + x - x^2)'$ derivált nulla, azaz $1 - 2x = 0$, amiből a maximumhely $x = \frac{1}{2}$. Így $d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} (2 + x - x^2) = 2 + \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$.
9. a.) $d_f(f, 0) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{12}{2} 3.gy$, tehát igaz.
 b.) $d_\infty(f, 0) = \max_{x \in [-1, 1]} |x^2 - 0| = 1$, tehát nem igaz.
10. 2 sugarúban: pl. 'paták'. 3 sugarúban: pl. 'paták', 'pasas', 'pacák'. 4 sugarúban: pl. 'paták', 'pasas', 'pacák', 'kalap'. A 'pocok' nincs benne a 3 sugarúban, mert éppen 3 távolságra van a 'patak' szótól. A 'patak' szó egységsugarú környezetében csak a 'patak' szó van benne.
11. $\text{int}H = \emptyset$, ugyanis egyetlen valós számnak sincs olyan környezete, amely csak $(0, 1)$ -beli racionális számot tartalmaz (bármely két racionális szám között van irracionális).
 $\text{ext}H = \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, ugyanis a $[0, 1]$ -en kívüli bármely valós számnak van olyan környezete, amely nem tartalmaz $(0, 1)$ -beli racionális számot.
 $\partial H = [0, 1]$, mert a $[0, 1]$ intervallum bármely elemének minden környezete tartalmaz $(0, 1)$ -beli racionális számot is és irracionális számot is.
 $H' = [0, 1]$, mert a $[0, 1]$ intervallum bármely elemének minden kipontozott környezete tartalmaz $(0, 1)$ -beli racionális számot. Nem nyílt (nem igaz rá, hogy minden pontja belső pont, hiszen nincs belső pontja), nem zárt (nem tartalmazza az összes torlódási pontját).
12. a.) Nem, mert pl. az $(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})$ ($n > 2$) sorozat H -beli és $\rightarrow \frac{1}{2}$. Mivel $\mathbb{R}$ -ben konvergens, így Cauchy-sorozat, de a határértéke nem H -beli, mert $\frac{1}{2} \notin H$.
 b.) Igen, mert H zárt ($H' = [0, 1] \subset H$).
13. a.) $|f'(x)| = |-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}| = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} \leq \frac{1}{3}$, ha $x \in [0, 1]$, tehát kontrakció $q = \frac{1}{3}$ mellett.
 b.) Nem, ugyanis $|f(-10) - f(-9)| = e^{\frac{10}{3}} - e^3 \approx 7,95 > |-10 - (-9)| = 1$.