

Mat3 gyakorlófeladatok 2.

1. Kontrakció-e az $f(x) = e^{2x}$ függvény

a.) a $[0, 1]$ intervallumon?

b.) a $[-2, -1]$ intervallumon?

Ha igen, adjunk meg hozzá megfelelő q kontrakciós számot.

2. A $4x = e^{-x}$ egyenletet fixpont-iterációval szeretnénk megoldani. Határozzunk meg egy megfelelő zárt intervallumot a fixpont-iteráció elvégzéséhez. Hányat kell lépünk a 10^{-4} -es pontosság eléréséhez ezen intervallum valamelyik végpontjából indulva?

3. Konvergens-e, és ha igen, hova tart az alábbi $\mathbb{R}^2$ -beli sorozat?

$$x_n = \left(e^{-\frac{1}{n^2}}, \frac{1 - 2n^3}{1 + n + n^2 + n^3} \right)$$

4. Konvergens-e az

$$x_n = \left(\frac{2n + 3}{n}, \frac{n + 1}{n} \right)$$

$\mathbb{R}^2$ -beli sorozat, és ha igen, hova tart? Adjunk megfelelő küszöbindexet $\varepsilon = 0.01$ -hez az egyes, a kettes és a maximumnormában is.

5. Konvergens-e $C[0, 1]$ -ben az integrálnorma szerint az

$$f_n(x) = \frac{n + 1}{n} x^n$$

függvénysorozat? Ha igen, hova tart?

Megoldások:

1. a.) Nem kontrakció, ugyanis $x = 0, y = 1$ esetén $|f(x) - f(y)| = e^2 - 1 > |x - y| = 1$.
b.) $|f'(x)| = 2e^{2x} \leq 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} < 1$, ha $x \in [-2, -1]$. (Itt felhasználtuk, hogy az $|f'(x)| = 2e^{2x}$ függvény a $[-2, -1]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, így -1 -ben veszi fel a maximumát.) Tehát f a $[-2, -1]$ intervallum kontrakció $q = \frac{2}{e^2} \approx 0.2707$ mellett.

2. A megoldás a $[0, 1]$ intervallumban van, ugyanis az $y = 4x$ függvény szigorúan monoton nő, az $y = e^{-x}$ függvény pedig szigorúan monoton csökken, és $x = 0$ -ban $4x < e^{-x}$, míg $x = 1$ -ben $4x > e^{-x}$.

Írjuk át az egyenletet $x = \frac{1}{4}e^{-x}$ alakba. Ekkor a megoldás az $f(x) = \frac{1}{4}e^{-x}$ függvény fixpontja.

Ezen f -re teljesülnek a fixponttétel feltételei a $[0, 1]$ -en, ugyanis

a.) $|f'(x)| = \frac{1}{4}e^{-x} < \frac{1}{4}$, ha $x \in [0, 1]$, tehát f kontrakció a $[0, 1]$ -en (amely teljes metrikus tér a szokásos $|\cdot|$ metrikával), kontrakciószámnak használható a $q = \frac{1}{4}$.

b.) f a $[0, 1]$ -en beleképez a $[0, 1]$ -be, ugyanis ha $x \in [0, 1]$, akkor $f(x) \in [\frac{1}{4e}, \frac{1}{4}] \subset [0, 1]$.

Az n lépésszám meghatározásához írjuk fel a fixponttételben szereplő hibabecslő formulát:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Ha az $x_0 = 0$ pontból indulunk, akkor $x_1 = \frac{1}{4}e^{-0} = \frac{1}{4}$. A q helyébe $\frac{1}{4}$ -et írva:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{(\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} < 10^{-4},$$

ha

$$4^n > \frac{1}{3} \cdot 10^4.$$

Logaritmust véve

$$n \lg 4 > \lg \left(\frac{10000}{3} \right).$$

Ebből $n > 5.85$, azaz elegendő hatot lépünk.

3. Konvergens, mert mindkét koordináta-sorozata konvergens:

$$e^{-\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1,$$

ugyanis $e^{-\frac{1}{n^2}} \rightarrow e^0 = 1$, valamint

$$\frac{1 - 2n^3}{1 + n + n^2 + n^3} = \frac{\frac{1}{n^3} - 2}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1} \rightarrow \frac{0 - 2}{0 + 1} = -2,$$

és így $x_n \rightarrow (1, -2)$.

4. Az első koordináta-sorozat 2-höz, a második 1-hez tart, így $x_n \rightarrow (2, 1)$. Az egyes normában

$$\left\| \left(\frac{2n+3}{n}, \frac{n+1}{n} \right) - (2, 1) \right\|_1 = \left\| \left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\|_1 = \frac{4}{n} < 0.01,$$

ha $n > \frac{4}{0.01}$. Ebből $N = 401$.

A kettes normában

$$\left\| \left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\|_2 = \frac{\sqrt{10}}{n} < 0.01,$$

ha $n > \frac{\sqrt{10}}{0.01}$. Ebból $N = 317$.

A maximumnormában

$$\left\| \left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\|_{\infty} = \frac{3}{n} < 0.01,$$

ha $n > \frac{3}{0.01}$. Ebból $N = 301$.

5. Az f_n függvénysorozat konvergens, és az azonosan nulla függvényhez tart, ugyanis

$$\left\| \frac{n+1}{n} x^n - 0 \right\|_f = \frac{n+1}{n} \int_0^1 x^n dx = \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$