

Mat3 gyakorlófeladatok 3.

1. Határozzuk meg az alábbi függvények összes változó szerinti parciális deriváltját!

a.) $f(x, y) = \frac{x+y^2}{3xy}$

b.) $f(x, y, z) = \cos \sqrt{xyz^2} + 4 \ln z$

c.) $f(x, y) = y \cdot 6^{\ln(2x-6)}$

d.) $f(x, y, z) = e^{4x-y} \cdot \cos(yz^2)$

e.) $f(x, y, z) = (xy)^z = x^z y^z$

2. Legyen $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, és $\phi(t) = (3cht, 5sht)$.

$(f \circ \phi)'(t) = ?$ $(\phi \circ f)'(x, y) = ?$

3. Határozzuk meg az

$$f(x, y) = \frac{25x^2y}{x^2 + y^3}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^2 + y^3 = 0\}$$

függvény iránymenti deriváltját az $a = (2, 1)$ pontban az $x + 3y = 5$ egyenes irányvektora mentén!

4. Keressük meg az

$$f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény

a) lokális szélsőértékhelyeit;

b) legkisebb és legnagyobb értékét az $x = 0, y = 0, x + y = 6$ egyenesekkel határolt zárt tartományban!

Megoldások:

1. a.) $\partial_x f(x, y) = -\frac{y}{3x^2}, \partial_y f(x, y) = \frac{y^2-x}{3xy^2}$

b.) $\partial_x f(x, y, z) = -\sin \sqrt{xyz^2} \cdot \frac{yz^2}{2\sqrt{xyz^2}}, \partial_y f(x, y, z) = -\sin \sqrt{xyz^2} \cdot \frac{xz^2}{2\sqrt{xyz^2}},$

$\partial_z f(x, y, z) = -\sin \sqrt{xyz^2} \cdot \frac{xyz}{\sqrt{xyz^2}} + \frac{4}{z}$

c.) $\partial_x f(x, y) = y \cdot 6^{\ln(2x-6)} \cdot \ln 6 \cdot \frac{1}{x-3}, \partial_y f(x, y) = 6^{\ln(2x-6)}$

d.) $\partial_x f(x, y, z) = 4e^{4x-y} \cdot \cos(yz^2),$

$\partial_y f(x, y, z) = -e^{4x-y} \cdot \cos(yz^2) + e^{4x-y} \cdot (-\sin(yz^2))z^2,$

$\partial_z f(x, y, z) = e^{4x-y}(-\sin(yz^2))2yz$

e.) $\partial_z f(x, y, z) = y^z z x^{z-1}, \partial_y f(x, y, z) = x^z z y^{z-1}, \partial_x f(x, y, z) = (xy)^z \ln(xy)$

2. A láncszabállyal, vagy a kompozíciófüggvényeket felírva és deriválva:

$$(f \circ \phi)'(t) = \text{sh}t(81\text{ch}^2t + 50\text{ch}t - 18);$$

$$(\phi \circ f)'(x, y) = \begin{bmatrix} 3\text{sh}(x^3 + y^2 - 6x) \cdot (3x^2 - 6) & 3\text{sh}(x^3 + y^2 - 6x) \cdot 2y \\ 5\text{ch}(x^3 + y^2 - 6x) \cdot (3x^2 - 6) & 5\text{ch}(x^3 + y^2 - 6x) \cdot 2y \end{bmatrix}$$

3. Az egyenes egy irányvektora: $v = (-3, 1)$. A v irányába mutató egységvektor:
 $e = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$.

$$\partial_x f(x, y) = 25 \cdot \frac{2xy(x^2 + y^3) - x^2y2x}{(x^2 + y^3)^2}, \quad \partial_y f(x, y) = 25 \cdot \frac{x^2(x^2 + y^3) - x^2y3y^2}{(x^2 + y^3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(2, 1) = (4, 8)$$

$$\partial_e f(2, 1) = f'(2, 1) \cdot e = 4 \cdot \frac{-3}{\sqrt{10}} + 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

4. a) Lokális szélsőérték csak azokban a pontokban lehet, amelyekre

$$f'(x, y) = ((2x - 6)(y^2 - 4y), (x^2 - 6x)(2y - 4)) = (0, 0), \text{ azaz}$$

$$(2x - 6)y(y - 4) = 0 \text{ és } x(x - 6)(2y - 4) = 0.$$

Az első egyenletből $x = 3$ vagy $y = 0$, ill. $y = 4$; a másodikból $y = 2$ vagy $x = 0$, ill. $x = 6$. Így a lehetséges szélsőérték helyek:

$$(3, 2); (0, 0); (0, 4); (6, 0); (6, 4)$$

A második derivált mátrixa:

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 2(y^2 - 4y) & (2x - 6)(2y - 4) \\ (2x - 6)(2y - 4) & 2(x^2 - 6x) \end{bmatrix}$$

A $(3, 2)$ pontban a determináns

$$\det f''(3, 2) = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} > 0,$$

tehát van szélsőérték, és mivel a bal felső elem negatív, így ez maximum. A többi pontban a determináns értéke negatív, így azokban nincs lokális szélsőérték.

b) Korlátos és zárt tartományról van szó, így f -nek itt biztosan létezik legkisebb és legnagyobb értéke. Az a) részben láttuk, hogy f -nek csak a $(3, 2)$ pontban van

lokális szélsőértéke (lok. max.). Ez a tartomány belsejében van, és itt $f(3, 2) = 36$.

Vizsgáljuk meg f viselkedését a tartomány határain!

Ha $x = 0$ vagy $y = 0$, akkor $f(x, y) = 0$.

Ha $x + y = 6$, azaz $x = 6 - y$, akkor a függvény

$$y \mapsto (y^2 - 6y)(y^2 - 4y), y \in [0, 6].$$

Keressük ezen egyváltozós függvény szélsőérték helyeit! A függvény deriváltja:

$$y \mapsto (2y - 6)(y^2 - 4y) + (y^2 - 6y)(2y - 4).$$

A derivált zérushelyei:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = \frac{15 + \sqrt{33}}{4}; \quad y_3 = \frac{15 - \sqrt{33}}{4}$$

Mivel $x = 6 - y$, így

$$x_1 = 6; \quad x_2 = \frac{9 - \sqrt{33}}{4}; \quad x_3 = \frac{9 + \sqrt{33}}{4}$$

f helyettesítési értékei ezekben a pontokban:

$$f(x_1, y_1) = 0, \quad f(x_2, y_2) \approx -25.96 \quad f(x_3, y_3) \approx 33.28$$

A függvény tehát a tartománybeli legnagyobb értékét a $(3, 2)$, legkisebb értékét pedig a $(\frac{9 - \sqrt{33}}{4}, \frac{15 + \sqrt{33}}{4})$ pontban veszi fel.