

Mat3 gyakorlófeladatok 4.

1. Létezik-e határértéke a $(0,0)$ -ban? Ha igen, add meg!

a.) $f(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x, y) \neq (0, 0)$

b.) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}, (x, y) \neq (0, 0)$

c.) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}, x \neq y$

d.) $f(x, y) = \frac{x+y+2}{(x-1)^2+y}, (x, y) \neq (1, 0)$

Megoldások:

1. a.) Polárkoordinátákra áttérve $f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{r} = r \sin^2 \varphi = \tilde{f}(r, \varphi)$. Legyen (r_n, φ_n) olyan sorozat, amelyre $(r_n) \rightarrow 0$. Ekkor a képpontok $\tilde{f}(r_n, \varphi_n)$ sorozata $\tilde{f}(r_n, \varphi_n) = r_n \cdot \sin^2 \varphi_n \rightarrow 0$, hiszen nullához tartó és korlátos sorozat szorzata 0-hoz tart. $\Rightarrow \exists \lim_{(0,0)} f = 0$.

b.) $y = mx$ egyenletű egyenes mentén közeledve a $(0,0)$ ponthoz $f(x_n, mx_n) = \frac{m^2 x_n^3}{x_n^3 + m^3 x_n^3} = \frac{m^2}{1+m^3} \rightarrow \frac{m^2}{1+m^3}$, ha $x_n \rightarrow 0$. Ez a határérték függ m -től, így $\nexists \lim_{(0,0)} f$.

c.) $y = mx$ egyenletű egyenes mentén közeledve a $(0,0)$ ponthoz $f(x_n, mx_n) = \frac{x_n^2 + m^2 x_n^2}{x_n - mx_n} = \frac{x_n + m^2 x_n}{1-m} \rightarrow 0$, ha $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ ha létezik $\lim_{(0,0)} f$, akkor az csak 0 lehet. Térjünk át polárkoordinátákra:

$$f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2}{r(\cos \varphi - \sin \varphi)} = \frac{r}{\cos \varphi - \sin \varphi} = \tilde{f}(r_n, \varphi_n)$$

Vegyük észre, hogy

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos \varphi - \sin \varphi) = 0,$$

vagyis ha φ elég közel van $\frac{\pi}{4}$ -hez, akkor $|\cos \varphi - \sin \varphi|$ tetszőlegesen közel lesz nullához. Ezért tetszőleges $r_1, r_2, \dots$ sorozat esetén minden r_n elemhez megválasztható φ_n úgy, hogy

$$|\tilde{f}(r_n, \varphi_n)| = \frac{r_n}{|\cos \varphi_n - \sin \varphi_n|} > 1$$

legyen. Ezen (r_n, φ_n) sorozatra $\tilde{f}(r_n, \varphi_n)$ nem tarthat nullához. Mivel egyenesek mentén nulla határértékhez jutottunk, így $\nexists \lim_{(0,0)} f$.

d.) f a $(0,0)$ pontban folytonos, így határértéke ott a helyettesítési érték: $\lim_{(0,0)} f = f(0,0) = 2$.