

Mat4 gyakorlófeladatok
Taylor-sorfejtés mértani sorra való visszavezetéssel

Fejtsük Taylor-sorba az alábbi komplex függvényeket a megadott z_0 középpont körül. Mekkora a konvergenciasugár?

1. $f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = 0$
2. $f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = 2$
3. $f(z) = \frac{1}{1-z^2}, \quad z_0 = 0$
4. $f(z) = \frac{1}{z^2-1}, \quad z_0 = 0$
5. $f(z) = \frac{1}{1-2z}, \quad z_0 = 0$
6. $f(z) = \frac{1}{1-2z}, \quad z_0 = 1$

Megoldások:

1. f egyetlen szinguláris pontja az 1, ennek a középponttól való távolsága 1, így a konvergenciasugár $R = 1$. A konvergenciatartomány tehát a 0 középpontú egységsugarú körlap. Ennek z pontjaira $|z| < 1$, így $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.
2. A $z_0 = 2$ pontnak a szinguláris ponttól való távolsága ismét 1, így $R = 1$. A konvergenciahalmaz tehát a 2 középpontú egységsugarú kör. Most $z_0 = 2$, tehát olyan sort keresünk, amelyben $z - 2$ hatványai szerepelnek. A konvergenciahalmaz z pontjaira $|z - 2| < 1$. Írjuk át f -et úgy, hogy $z - 2$ jelenjen meg a nevezőben:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(z-2)-2} = \frac{1}{-1-(z-2)} = -\frac{1}{1+(z-2)} = -\frac{1}{1-y},$$

ahol $y = -(z-2)$. Mivel $|z-2| < 1$, így $|- (z-2)| < 1 \Rightarrow |y| < 1$. Tehát

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{1-y} = -(1+y+y^2+\dots) = -1+(z-2)-(z-2)^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-2)^n.$$

3. f szinguláris pontjai: 1 és $-1 \Rightarrow R = 1$, a konvergenciahalmaz a 0 középpontú egységsugarú kör belseje. Ezekben a pontokban $|z| < 1 \Rightarrow |z|^2 < 1 \Rightarrow |z|^2 < 1$. (Az utóbbi abból következik, hogy minden z komplex számra is $|z|^2 = |z^2|$ (könnyen beláthatjuk!). Így

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}.$$

4.

$$\frac{1}{z^2 - 1} = - \left(\frac{1}{1 - z^2} \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}.$$

5. f szinguláris pontja a $z = \frac{1}{2}$, így $R = \frac{1}{2}$. A konvergenciahalmaz tehát a 0 középpű $\frac{1}{2}$ sugarú kör. Ennek z pontjaira $|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow |2z| < 1$. Ezért

$$\frac{1}{1 - 2z} = 1 + 2z + 4z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n.$$

6. $R = \frac{1}{2}$, a konvergenciahalmaz az 1 középpű $\frac{1}{2}$ sugarú kör. Ennek z pontjaira $|z - 1| < \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{1 - 2z} = \frac{1}{1 - 2(z - 1) - 2} = \frac{1}{-1 - 2(z - 1)} = (-1) \cdot \frac{1}{1 + 2(z - 1)} = (-1) \cdot \frac{1}{1 - y},$$

ahol $y = -2(z - 1)$. Mivel $|z - 1| < \frac{1}{2}$, így $|-2(z - 1)| < 1$, azaz $|y| < 1$. Ezért

$$\frac{1}{1 - 2z} = -(1 + y + y^2 + \dots) = -(1 - 2(z - 1) + 4(z - 1)^2 - 8(z - 1)^3 + \dots) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^n (z - 1)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (z - 1)^n.$$