

Mat3 zárthelyi
2012. október 22.

1. Metrikus tér-e $(\mathbb{R}^+, \rho)$, ahol

$$\rho(x, y) := |x^4 - y^4|?$$

2. Norma-e az $\mathbb{R}^3$ vektortéren az $\|(x_1, x_2, x_3)\| := |x_2| + |x_3|$ függvény?

3. Teljesülnek-e a fixponttétel feltételei az $f(x) = \frac{1}{6} \cos^2 x$ függvényre a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon? Ha az $x = \frac{1}{6} \cos^2 x$ egyenletet fixpont-iterációval szeretnénk megoldani, hányat kell lépni a 10^{-6} -os pontosság eléréséhez a nullából indulva?

4. A $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben benne van-e az $f(x) = x^2$ függvény a $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ függvény 1 sugarú környezetében?

5. Konvergens-e a $(C[0, \frac{\pi}{2}], \rho_\infty)$ metrikus térben az

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n^n}$$

függvénysorozat? Ha igen, hova tart?

6. Létezik-e határértéke az

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{100 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$$

függvénynek a $(0, 0)$ pontban? Ha igen, mi az?