

Matematika 3

1. gyakorlat

Valós függvények Riemann-integrálja - ismétlés

Ebben a félévben az első témánk a többváltozós függvények integrálszámítása lesz. Mint látni fogjuk, ehhez a fogalomhoz az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények Riemann-integráljából kiindulva tudunk majd eljutni, amellyel Matematika 1 órán ismerkedtünk meg. Idézzük fel a tanultakat!

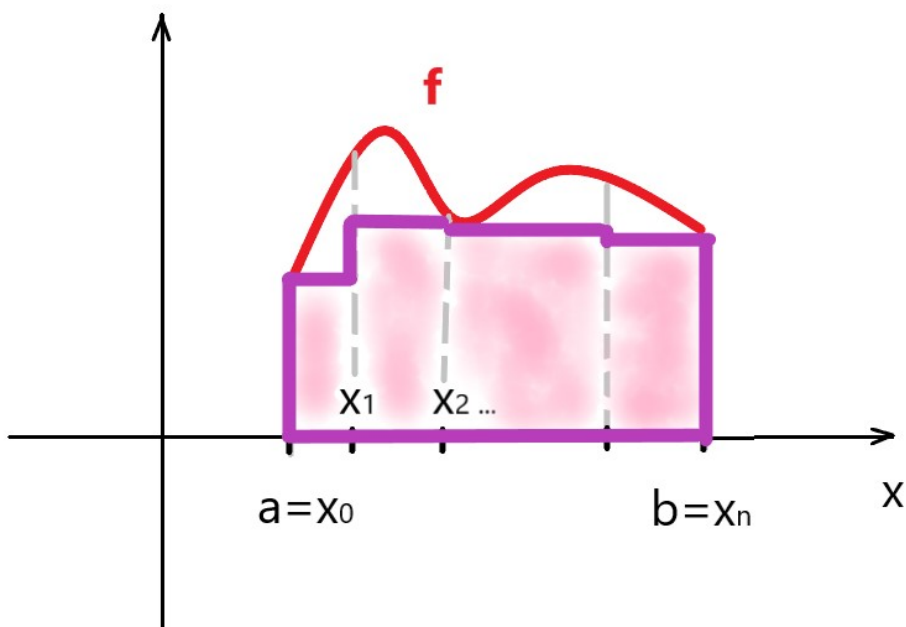
Cél: Egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikon alatti területének a meghatározása.

Ötlet: osszuk fel kisebb részintervallumokra az $[a, b]$ -t az $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ osztópontokkal. A

$$\tau = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$$

halmazt az $[a, b]$ egy felosztásának nevezzük. A területet közelíthetjük úgy, hogy minden részintervallumon az f legkisebb értékét (pontosabban infimumát) megszorozzuk az adott részintervallum hosszával, és ezeket a szorzatokat (kis téglalapok területei) összeadjuk. Az ábrán a lilával körülhatárolt rész összterületéről van szó. Elnevezés: f τ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege. Képlettel:

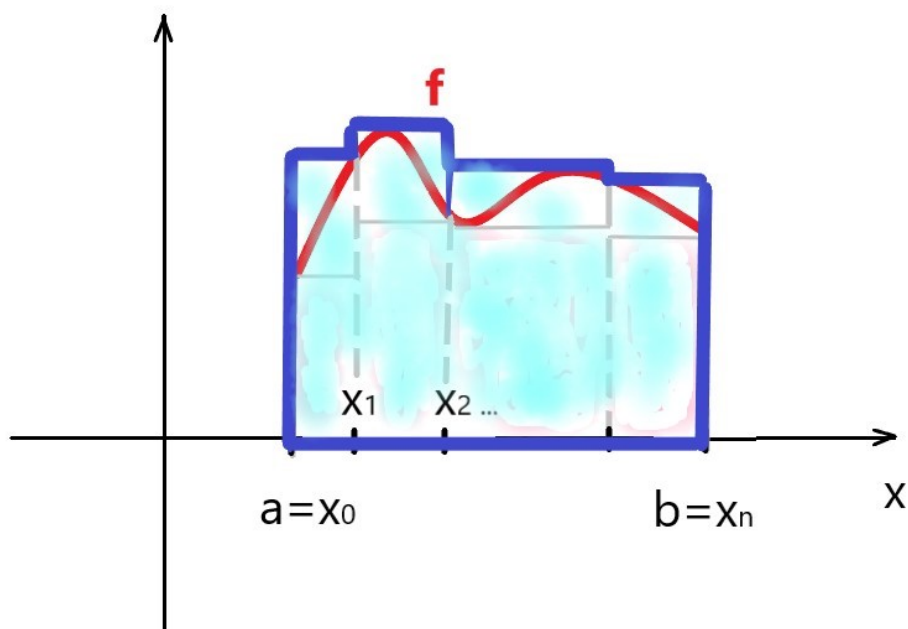
$$\sigma_{\tau}^{\text{alsó}} = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$



Hasonlóan definiálható a felső közelítő összeg:

$$\sigma_{\tau}^{\text{felső}} = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Az alábbi ábrán a vastag kék vonallal határolt alakzat területét jelenti ez.



Jelölje $\mathcal{A}^{\text{alsó}}$ ill. $\mathcal{A}^{\text{felső}}$ az összes alsó és felső közelítő összeg halmazát, amelyet az adott f függvényhez az adott $[a, b]$ intervallumon az összes (végtelen sok!) lehetséges felosztás mellett készíthetünk, így egy-egy valós számhalmazt kapunk.

0.1 Definíció. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$ -n (jelöléssel: $f \in R[a, b]$), ha $\sup \mathcal{A}^{\text{alsó}} = \inf \mathcal{A}^{\text{felső}}$. Ezt a közös számot jelölje $\int_a^b f$.

Példák.

1. $f(x) = 1, x \in [0, 2]$. Legyen $\tau_1 = \{[0, 1], [1, 2]\}$. Mivel egyenlő $\sigma_{\tau_1}^{\text{alsó}}$ és $\sigma_{\tau_1}^{\text{felső}}$?

$$\sigma_{\tau_1}^{\text{alsó}} = \inf_{[0,1]} f \cdot (1 - 0) + \inf_{[1,2]} f \cdot (2 - 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2.$$

$$\sigma_{\tau_1}^{\text{felső}} = \sup_{[0,1]} f \cdot (1 - 0) + \sup_{[1,2]} f \cdot (2 - 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2.$$

(Itt az inf ill. sup egyben minimum/maximum.)

És más felosztásnál?

Tetszőleges $H_i \subset [a, b]$ intervallumon $\sup_{H_i} f = \inf_{H_i} f = 1$. Így

$$\sigma_\tau^{\text{alsó}} = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) = 1 \cdot (x_n - x_0) = 2 = \sigma_\tau^{\text{felső}}$$

minden τ felosztásnál, ezért $\mathcal{A}^{\text{alsó}} = \mathcal{A}^{\text{felső}} = \{2\} \Rightarrow \sup \mathcal{A}^{\text{alsó}} = \inf \mathcal{A}^{\text{felső}} = 2 \Rightarrow \int_a^b f = 2$.

$$2. \ f(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

(a $[0, 1]$ -en értelmezett Dirichlet-függvény.)

Legyen τ egy felosztása a $[0, 1]$ -nek. Mivel minden intervallum tartalmaz racionális és irracionális pontot is, ezért tetszőleges H_i darabkán

$$\inf_{H_i} D = 0 \text{ és } \sup_{H_i} D = 1$$

$\Rightarrow \sigma_\tau^{\text{alsó}} = 0 \cdot (x_1 - x_0) + 0 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) = 0$ minden τ felosztás esetén.
Így

$$\mathcal{A}^{\text{alsó}} = \{0\}.$$

Továbbá, $\sigma_\tau^{\text{felső}} = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) = 1$, így

$$\mathcal{A}^{\text{felső}} = \{1\}.$$

Következésképpen

$$\sup \mathcal{A}^{\text{alsó}} = 0 \neq \inf \mathcal{A}^{\text{felső}} = 1,$$

és így a Dirichlet-függvény nem integrálható a $[0, 1]$ intervallumon.

A Riemann-integrál kiszámítása

Erre a gyakorlatban legtöbbször a Newton–Leibniz-formulát használjuk: ha f -nek létezik F primitív függvénye, akkor $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Tehát a primitív függvényeket kell tudnunk felírni.

Emlékeztető: Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Keressük az összes olyan $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $F' = f$. Jelölés: $\int f(x)dx$.

A legfontosabb elemi függvények primitív függvényei:

$$\int 1 dx = x + c \quad (1)$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c \quad (2)$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \quad (3)$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad (5)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad (6)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (7)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \quad (9)$$

$$(10)$$

Gyakran alkalmazzuk a következő műveleti szabályokat:

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (11)$$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx. \quad (12)$$

Példák.

1.

$$\int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

2.

$$\int_1^2 (3x - 1) dx = ?$$

$$\int (3x - 1) dx = 3 \frac{x^2}{2} - x (+c) \Rightarrow \int_1^2 (3x - 1) dx = \left[3 \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 3, 5.$$

3.

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = ?$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$