

Matematika 3

2. gyakorlat

További technikák speciális alakú függvények integrálására:

1. Parciális integrálás

Tegyük fel, hogy u és v folytonosan differenciálható függvények. Ekkor

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Pl.

1) $\int x e^x dx = ?$

$v(x) = x$ és $u'(x) = e^x$ ($u(x) = e^x$) szereposztással

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x = x e^x - e^x + c$$

2) $\int \ln x dx = ?$

$v(x) = \ln x$, $u'(x) = 1$ ($u(x) = x$) szereposztással

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

Ebből már számolható határozott Riemann-integrál, de megjegyezhetjük a parciális integrálás képletének a határozott változatát is:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

2. Helyettesítéses integrálás

Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos, és $x = g(t)$, ahol $g(t)$ folytonosan differenciálható. Ekkor

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt,$$

ill.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

Pl.

$$\int_1^2 (2x+1)^3 dx = \left| \begin{array}{ll} t := 2x+1 & x=1 \Rightarrow t=3 \\ x = \frac{t-1}{2} =: g(t) & x=2 \Rightarrow t=5 \\ g'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \end{array} \right| = \int_3^5 t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \dots = 68.$$

3. $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ alakú integrálok

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$, ahol F az f primitív függvénye.

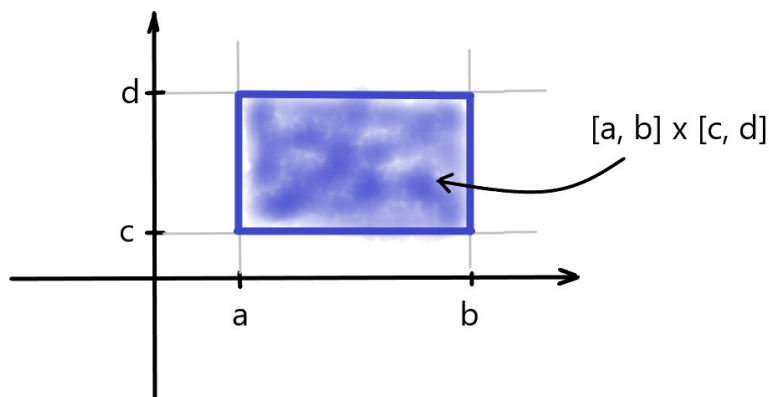
Pl. $\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c$, hiszen itt $g(x) = \sin x$, és $f(g(x)) = \sin^2 x$, ha $f(t) = t^2$, így $g(x) = \sin x$ -et az $f(t) = t^2$ függvény $F(t) = \frac{t^3}{3}$ primitív függvényébe helyettesítve kapjuk a megoldást.

Többszörös integrálok

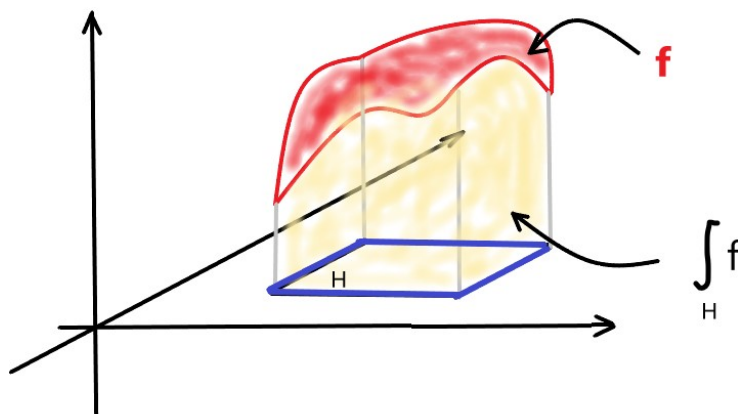
$f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ függvények Riemann-integráljával foglalkozunk. Az előadáson láttuk, hogyan értelmezhető ez közelítő összegekkel. A gyakorlaton a kiszámítására koncentrálnak.

Kettős integrál intervallumon

Először $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények integrálját számítjuk ki intervallumon. Az $\mathbb{R}^2$ -beli intervallum az alábbi típusú ponthalmazt jelenti: $H = [a, b] \times [c, d]$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ($a < b$, $c < d$).



Az $\int_H f$ geometriai jelentése $f \geq 0$ függvény esetén a grafikon alatti térfogat a H intervallum fölött (sárga térrész).



Térjünk rá a kiszámítására! A következő állításra támaszkodhatunk:
Tegyük fel, hogy $f \in R(H)$, és minden $x \in [a, b]$ esetén létezik az

$$\int_c^d f(x, y) dy =: \tilde{I}(x)$$

integrál. Ekkor $\tilde{I}$ integrálható az $[a, b]$ -n, és

$$\int_H f = \int_a^b \tilde{I}(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Tehát a feladat két egymást követő egyváltozós Riemann-integrál kiszámítása.

0.1 Megjegyzés. Az x és az y szerepe felcserélhető.

Példák.

1. Legyen $f(x, y) = 2x - y^2$, $H = [0, 1] \times [0, 2]$. Mivel egyenlő $\int_H f$?

A keresett integrál létezik, mert f folytonos H -n.

1. megoldás: integráljunk először y szerint:

$$\int_H f = \int_0^1 \left(\int_0^2 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^2 (2x - y^2) dy \right) dx$$

Először a belső integrált számítjuk ki, eközben x -et konstansként kezeljük.

$$\int_0^2 (2x - y^2) dy = \left[2xy - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^2 = 4x - \frac{8}{3}.$$

Ezután a kapott, csak x -től függő egyváltozós függvényt kell integrálni:

$$\int_H f = \int_0^1 \left(4x - \frac{8}{3}\right) dx = \left[4\frac{x^2}{2} - \frac{8}{3}x\right]_0^1 = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

2. megoldás: először x szerint integrálva:

$$\int_H f = \int_0^2 \left(\int_0^1 (2x - y^2) dx\right) dy = \int_0^2 [x^2 - y^2 x]_{x=0}^1 dy = \int_0^2 (1 - y^2) dy = \dots = -\frac{2}{3}.$$

2. Legyen $f(x, y) = x^2 y^2$, $H = [-1, 1] \times [1, 2]$. $\int_H f = ?$

$$\int_H f = \int_{-1}^1 \left(\int_1^2 x^2 y^2 dy\right) dx.$$

Belül kihozhatjuk az x^2 szorzót:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_1^2 x^2 y^2 dy\right) dx = \int_{-1}^1 x^2 \left(\int_1^2 y^2 dy\right) dx = \left(\int_{-1}^1 x^2 dx\right) \left(\int_1^2 y^2 dy\right)$$

Észrevehetjük, hogy az x -től függő rész és az y -től függő rész integrálja összeszorozódott.

Általában is: ha speciálisan $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, akkor az integrálja az $[a, b] \times [c, d]$ -n

$$\int_a^b \int_c^d g(x) \cdot h(y) dy dx = \left(\int_a^b g(x) dx\right) \cdot \left(\int_c^d h(y) dy\right).$$