

Matematika 3

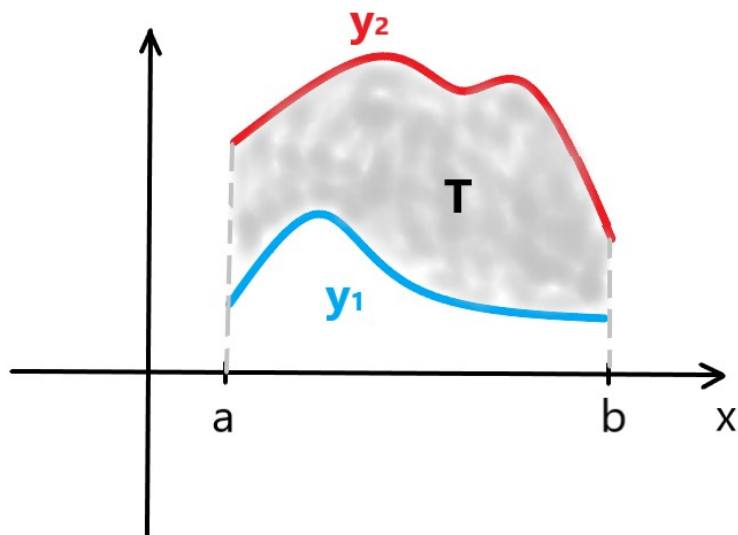
3. gyakorlat

Kettős integrál normáltartományon

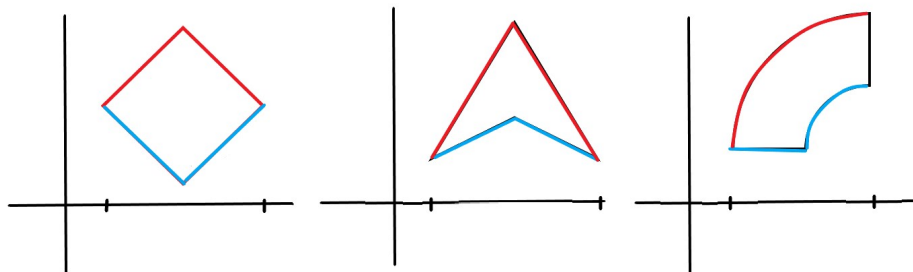
Az intervallumnál általánosabb tartománytípus a normáltartomány. Legyenek $y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, és az y_1 haladjon végig az y_2 alatt ($y_1(x) \leq y_2(x) \forall x \in [a, b]$). Ekkor normáltartománynak nevezzük a

$$T := \{(x, y) : x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

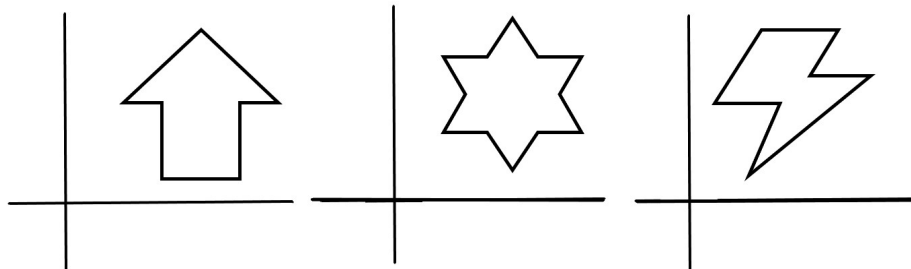
halmazt.



A következő alakzatok például normáltartományok:



Ezek viszont nem:



Normáltartományon vett kettős integrált az alábbi tétel segítségével számolhatunk:

Ha $f \in R(T)$, és minden $x \in [a, b]$ esetén létezik az

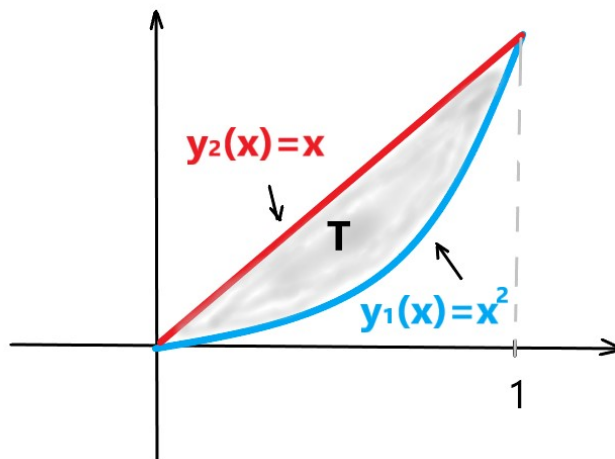
$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

Riemann-integrál, akkor

$$\int_T f = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Vigyázzunk arra, hogy itt már x és y szerepe nem cserélhető fel.

Pl. Integráljuk az $f(x, y) = x^2 y$ függvényt a $T = \{(x, y), x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq x\}$ normáltartományon!



$$\int_T f = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x x^2 y dy \right) dx.$$

Először elvégezzük a belső integrálást, ahol csak arra kell vigyázni, hogy a határok függnek x -től.

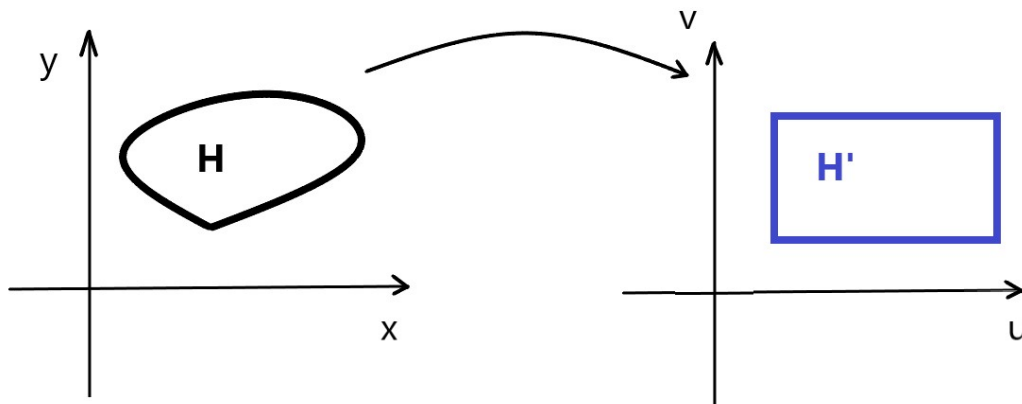
$$\int_{x^2}^x x^2 y dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^x = \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2}$$

Ezzel

$$\int_T f = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x x^2 y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \left[\frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{14} \right]_0^1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35}.$$

A kettős integrál transzformációja

Ha $f(x, y)$ integrálása nehézségekbe ütközik az (x, y) sík H tartományán, megpróbálhatunk áttérni más változókra. Jelölje ezeket u és v , és tegyük fel, hogy az (x, y) sík H tartománya az (u, v) sík H' tartományába megy át. (Szerencsés esetben ezen tartományon könnyű integrálni, pl. kedvező, ha ez egy intervallum.)



Ekkor egy, a helyettesítéses integrálásra emlékeztető képlettel számolhatunk:

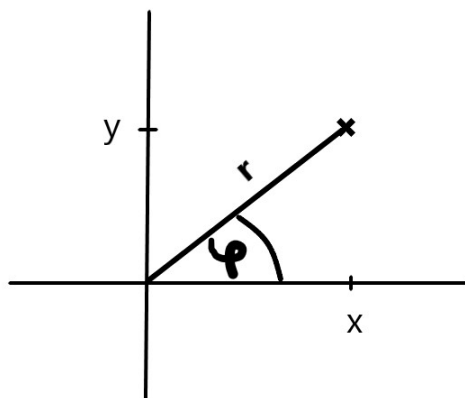
$$\int_H f = \int_{H'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

ahol

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} := \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

a transzformáció ún. Jacobi-determinánsa. (A determináns fogalmát Vektorszámításból tanuljuk. Egyelőre elég annyit tudni, hogy egy $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix determinánsa az $|A| := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ számot jelenti.) Vegyük észre, hogy a fenti képletben ezt a determinánst még abszolút értékben is kell vennünk.

Példaként tekintsük a polártranszformációt. Ekkor az új változókat u és v helyett r és φ jelöli.



Közöttük az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$$

Ekkor tehát a transzformáció Jacobi-determinánsa:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

Így

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = |r| = r.$$

Polárkoordinátákra áttérve tehát mindig r -rel kell majd szoroznunk!

Pl. Határozzuk meg az

$$f(x, y) = \frac{99x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

függvény integrálját a

$$H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\}$$

félkörre.

Megoldás: A félkör normáltartomány, de így a feladatot nehéz lenne végigszámolni. Kösrszerű tartomány esetén jól jöhet a polártranszformáció (ezt az f függvény alakja is

indokolja: az $x^2 + y^2$ kombináció polároordinátákkal egyszerű lesz...). Térjünk tehát át az r, φ koordinátákra! A megadott félkör azon (r, φ) pontok halmaza az (r, φ) síkon, amelyekre $r \in [0, 1]$, és $\varphi \in [0, \pi]$. Tehát

$$H' = \{(r, \varphi) : r \in [0, 1], \varphi \in [0, \pi]\}$$

Vegyük észre, hogy a H' halmaz már egy intervallum. Az integrál kiszámítása:

$$\int_H f = \int_{H'} \frac{99r^2 \cos^2 \varphi r \sin \varphi}{r} \cdot r dr d\varphi = \int_0^\pi \left(\int_0^1 99r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi dr \right) d\varphi$$

Intervallumon kell integrálnunk olyan függvényt, amely egy csak r -től és egy csak φ -től függő tényező szorzata. Az integrál a már látott módon a két rész integráljának szorzatára bomlik:

$$99 \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) = 99 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cdot \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^\pi = 16,5.$$