

Matematika 3

4. gyakorlat

A kettős integrál alkalmazásai

1. Területszámítás

Tudjuk, hogy a valós konstans 1 függvény integrálja tetszőleges $[a, b]$ intervallumon az intervallum hosszát adja. Hasonlóan, az $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ képező konstans 1 függvény integrálja egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazon a H halmaz területével egyenlő (hiszen a H alapterületű, 1 magasú hasáb térfogata az alapterület szorozva 1-gyel). Ezt az észrevételt felhasználhatjuk területszámításra.

Pl. Mekkora területet zár be a $\sin$ és a $\cos$ függvény grafikonja $x = -\frac{3\pi}{4}$ és $\frac{\pi}{4}$ között?

A feladat a konstans 1 függvény integrálása a közrezárt területen, amely a

$$H = \{(x, y) : x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \sin x \leq y \leq \cos x\}$$

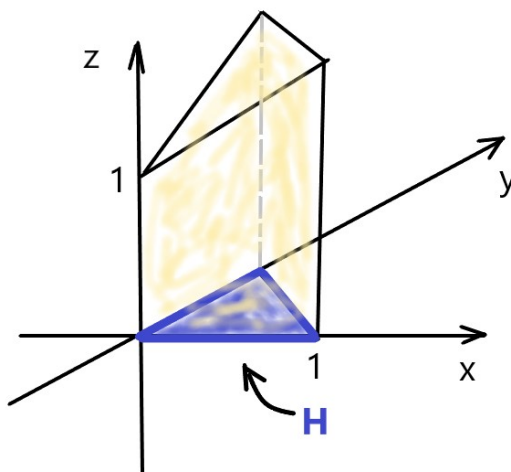
normáltartomány.

$$T_H = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} 1 dy \right) dx = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}.$$

2. Térfogatszámítás

Az integrál geometriai jelentésének ismeretében természetes, hogy a kettős integrál térfogatszámításra is felhasználható.

Pl. Számítsuk ki az alábbi felületekkel határolt test térfogatát: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1 + x + y$, $x + y = 1$!



Megoldás: Az $f(x, y) = 1 + x + y$ függvény integrálját kell kiszámítanunk a

$$H = \{(x, y) : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

normáltartományon. Tehát a térfogat

$$\begin{aligned} V &= \int_H (1 + x + y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 + x + y) dy \right) dx = \int_0^1 \left[y + xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \right) dx = \dots = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Hármas integrál

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények Riemann-integráljával foglalkozunk. Az integrálás ilyenkor is intervallumon a legegyszerűbb, vagyis

$$H = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \times [a^3, b^3] \int_H f = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \right) \right)$$

alakú halmazon. A kettős integrálhoz hasonlóan most három darab egyváltozós Riemann-integrált számítunk ki. A változók sorrendje tetszőleges.

Pl. Határozzuk meg az $f(x, y, z) = x + yz$ függvény integrálját a $H = [0, 1]^3$ kockára.

$$\int_H f = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x + yz) dz \right) dy \right) dx$$

Belülről kifelé haladunk:

$$\int_0^1 (x + yz) dz = \left[xz + y \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^1 = x + \frac{y}{2}$$

$$\int_0^1 \left(x + \frac{y}{2} \right) dy = \left[xy + \frac{y^2}{4} \right]_{y=0}^1 = x + \frac{1}{4}$$

$$V = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{4} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

A hármas integrál transzformációja

Tegyük fel, hogy az x, y, z változók helyett áttérünk az u, v, w új változókra, és ezzel az (x, y, z) tér H tartománya átranszformálódik az (u, v, w) H' tartományába. Ekkor

$$\int_H f = \int_{H'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw,$$

ahol

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

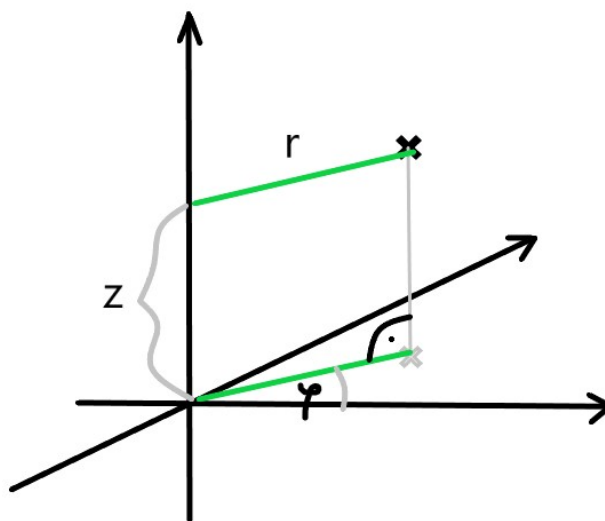
a transzformáció ún. Jacobi-determinánsa.

Két fontos térbeli koordináta-rendszerrel ismerkedünk meg, és mindkettő esetére megadjuk a Jacobi-determinánst.

1. Hengerkoordináta-rendszer

A hengerkoordináta-rendszer egy pont helyét a következő három számadattal adjuk meg:

- r : a pontba húzott helyvektor xy síkra eső vetületének a hossza (azaz a pont távolsága a z tengelytől);
- φ : az előbbi vetület x -tengellyel bezárt szöge;
- z : a pont magassága, a szokásos z koordináta



A régi és az új koordináták kapcsolata:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke r , tehát a hengerkoordináta-rendszerre való áttérésnél ugyanúgy r -rel szorzunk, mint a polártranszformációnál.

Pl. legyen

$$f(x, y, z) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}, \quad H = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2\}$$

$\int_H f = ?$ Térjünk át hengerkoordinátákra!

$$H' = \{(r, \varphi, z) : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2\}$$

A H' halmaz $\mathbb{R}^3$ -beli intervallum.

$$\int_H f = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{2}{1 + r^2} r d\varphi dz dr = 4\pi \int_0^1 \frac{2r}{1 + r^2} dr = 4\pi [\ln(1 + r^2)]_0^1 = 4\pi \ln 2.$$