

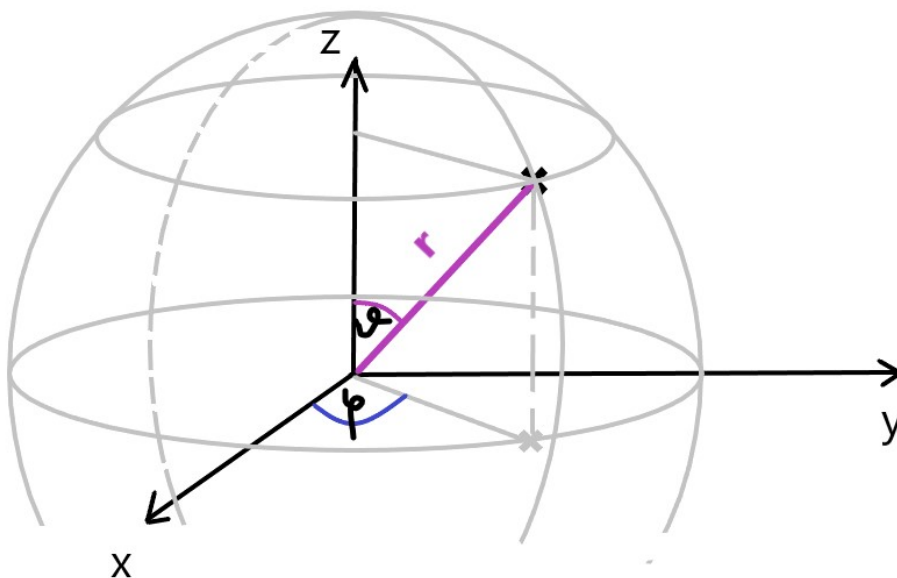
Matematika 3

5. gyakorlat

2. Gömbi koordináta-rendszer

A gömbi koordináta-rendszer egy pont helyét a következő három számadattal adjuk meg:

- r : a pont origótól vett távolsága (a pontba mutató helyvektor hossza, ez nem ugyanaz, mint a hengerkoordináta-rendszerbeli r)
- ϑ : a helyvektor z -tengellyel bezárt szöge;
- φ : a helyvektor xy -síkra eső vetületének az x -tengellyel bezárt szöge



A régi és az új koordináták kapcsolata:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke $|r^2 \sin \vartheta|$ ($= r^2 \sin \vartheta$), ha $\vartheta \in [0, \pi]$.

Pl. legyen

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{x^2 + y^2 + z^2},$$

a H halmaz pedig az origó középpontú egységsugarú gömb. Térjünk át gömbi koordinátákra! Ekkor

$$H' = \{(r, \vartheta, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

ami intervallum. Az f függvény gömbi koordinátás alakja:

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{r \sin \vartheta \cos \varphi + r \sin \vartheta \sin \varphi}{r^2} \\ \int_H f &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r \sin \vartheta (\cos \varphi + \sin \varphi)}{r^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin^2 \vartheta (\cos \varphi + \sin \varphi) d\vartheta d\varphi dr = \\ &= \left(\int_0^1 r dr \right) \left(\int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \right) \left(\int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \right) = 0,\end{aligned}$$

ugyanis a középső integrál 0.

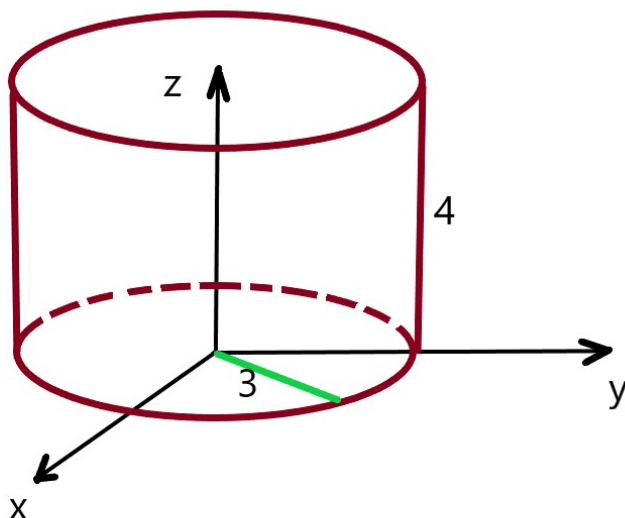
A fizikában a hármas integrál alábbi alkalmazásaival találkozhatunk:

- Az $\int_H 1 dx dy dz$ a H tartomány térfogatát adja meg.
- Ha $\rho(x, y, z)$ a sűrűség, akkor $\int_H \rho(x, y, z) dx dy dz$ a H térrészben foglalt tömeget adja meg.

Felület paraméterezése

Olyan kétváltozós függvényt keresünk, amely a felületet alkotó $\mathbb{R}^3$ -beli pontthalmazba képez.

Pl. 1.a. Paraméterezzük annak a hengernek a **palástját**, amelynek alaplappja az origó középpontú, 3 sugarú kör az xy -síkban, és magassága 4 egység.

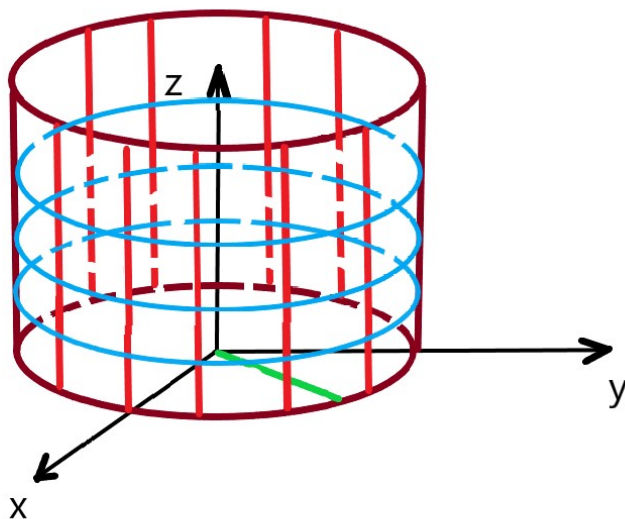


Két számadatot kellene találni, amelyekkel egyszerűen megadhatjuk a palástot alkotó pontok mindhárom koordinátáját. Elég megadni, hogy az xy síkban hány fokkal megyünk körbe (φ , pl. az x -tengelyhez mérten), valamint milyen magasan van a pont (z). Ezek lesznek a felületet paraméterező Φ függvény változói (az ún. paraméterek). Megadjuk a függvény alakját és értelmezési tartományát:

$$\Phi(\varphi, z) = (3 \cos \varphi, 3 \sin \varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 4].$$

(Tehát az Ω paraméterhalmaz, vagyis Φ értelmezési tartománya a $[0, 2\pi] \times [0, 4]$ intervallum.)

Készítsünk ábrát a φ - és z -paramétervonalakról (kék ill. piros)! Ezeket a görbéket úgy kapjuk, hogy a palást egy-egy kiválasztott pontjából z -t ill. φ -t (azaz a másik paramétert) konstans értéken tartva mozdulunk el. A paramétervonalak behálózzák az egész palástot, és azt is megfigyelhetjük, hogy itt kölcsönösen merőlegesek egymásra minden pontban.

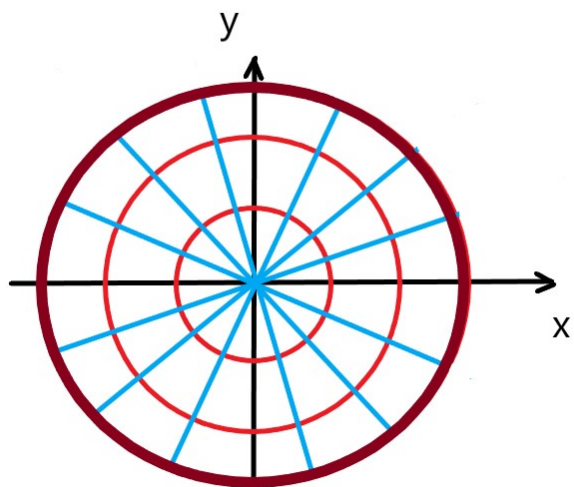


Pl. 1.b. Paraméterezzük a fenti henger alaplapját (körlap)!

Paramétereknek a polárkoordinátákat érdemes választani, az r 0-tól 3-ig, a φ 0-tól 2π -ig változzon:

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0), \quad r \in [0, 3], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

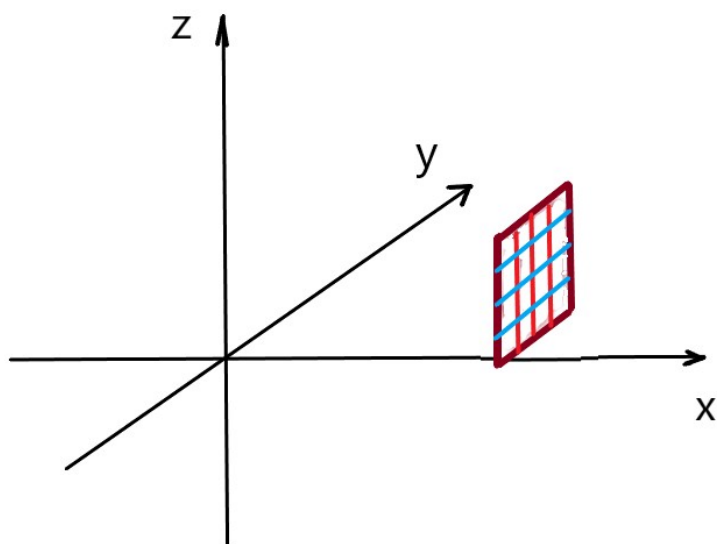
Az ábra mutatja az r - és φ -paramétervonalakat.



Pl. 1.c. Paraméterezzük az előbbi henger fedőlapját (körlap)!

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 4), \quad r \in [0, 3], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Pl. 2.a. Paraméterezzük azt a négyzetlapot, amelynek csúcsai a $(2, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 1, 1)$ pontok!



Ennek a négyzetlapnak a síkja párhuzamos az yz -síkkal. Paraméternek érdemes az y és z

koordinátát választani. A paraméterező függvény:

$$\Phi(y, z) = (2, y, z), \quad y \in [0, 1], \quad z \in [0, 1].$$

Pl. 2.a. Paraméterezzük azt a négyzetlapot, amelynek csúcsai a $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ pontok! Ennek síkja az xy síkkal párhuzamos.

$$\Phi(x, y) = (x, y, 1), \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1].$$

Pl. 3. Paraméterezzük az origó középpontú, 2 sugarú gömb felületét!

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = (2 \cos \vartheta \cos \varphi, 2 \cos \vartheta \sin \varphi, 2 \sin \vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$