

## Matematika 3

### 6. gyakorlat

#### Felületi integrál

A felületi integrál kiszámítását két példán keresztül nézzük meg.

1. Számítsuk ki az  $f(x, y, z) = (x, y, z)$  függvény felületi integrálját annak a hengernek a palástjára, amelynek alaplappja az origó középpontú, 1 sugarú,  $xy$  síkban fekvő körlap, és magassága  $m$ . A felszínvektorokat kifelé irányítsuk!

Először paraméterezzük a hengerpalástot!

$$\Phi(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, m].$$

A felületi pontokra merőleges vektort kapunk a  $\partial_\varphi \Phi \times \partial_z \Phi$  és a  $\partial_z \Phi \times \partial_\varphi \Phi$  vektoriális szorzattal is. A kettő közül azt kell kiválasztanunk, amelyik kifelé mutat a felületből. Ez most a  $\partial_\varphi \Phi \times \partial_z \Phi$  vektor.

A felületi integrál:

$$\int_{\Phi} f = \int_{\Omega} \langle f(\Phi(\varphi, z)), \partial_\varphi \Phi(\varphi, z) \times \partial_z \Phi(\varphi, z) \rangle d\varphi dz$$

Itt

$$f(\Phi(\varphi, z)) = f(\cos \varphi, \sin \varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$$

$$\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

és

$$\partial_z \Phi(\varphi, z) = (0, 0, 1)$$

A  $\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) \times \partial_z \Phi(\varphi, z)$  keresztszorzat kiszámításához a következő általános szabályt alkalmazzuk:

Ha  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$  és  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , akkor

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Így

$$\partial_\varphi \Phi(\varphi, z) \times \partial_z \Phi(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezzel

$$\langle f(\Phi(\varphi, z)), \partial_\varphi \Phi(\varphi, z) \times \partial_z \Phi(\varphi, z) \rangle = \langle (\cos \varphi, \sin \varphi, z), (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \rangle = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

A felületi integrál tehát

$$\int_{\Phi} f = \int_0^{2\pi} \int_0^m 1 dz d\varphi = 2\pi m.$$

2. Számítsuk ki az  $f(x, y, z) = (z^2, x^2 + y^2, 1)$  függvény felületi integrálját arra a négyzetlapra, amelynek csúcsai  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  és  $(0, 1, 1)$ . A felszínvektorokat jobbra irányítsuk!

Paraméterezzük a négyzetlapot:

$$\Phi(x, z) = (0, y, z), \quad y \in [0, 1], \quad z \in [0, 1].$$

A felületi integrál képletében a  $\partial_y \Phi \times \partial_z \Phi$  sorrend lesz a megfelelő.

$$f(\Phi(y, z)) = f(0, y, z) = (z^2, y^2, 1).$$

$$\partial_y \Phi(y, z) = (0, 1, 0)$$

$$\partial_z \Phi(y, z) = (0, 0, 1)$$

$$\partial_y \Phi(y, z) \times \partial_z \Phi(y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle f(\Phi(y, z)), \partial_y \Phi(y, z) \times \partial_z \Phi(y, z) \rangle = \langle (z^2, y^2, 1), (1, 0, 0) \rangle = z^2$$

Ebből a felületi integrál

$$\int_{\Phi} f = \int_0^1 \left( \int_0^1 z^2 dz \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}.$$