

Matematika 3

7. gyakorlat

Függvénysorozatok

Emlékeztető: Számsorozat: $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

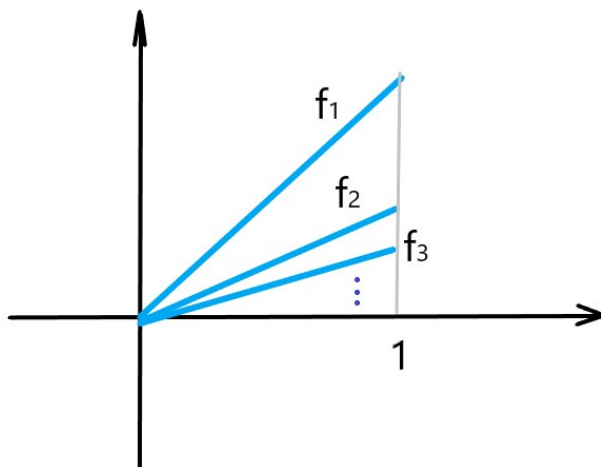
Függvénysorozat: $n \mapsto f_n$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.

Pl.1. $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0, 1]$ egy függvénysorozat. Adjuk meg és ábrázoljuk az első néhány elemét!

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = \frac{x}{2}$$

$$f_3(x) = \frac{x}{3}$$



a) Konvergens-e az $x_0 = 1$ pontban?

$$f_n(1) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

konvergens számsorozat, tehát igen.

b) Konvergens-e pontonként a $[0, 1]$ intervallumon?

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \rightarrow 0 \text{ minden rögzített } x \in [0, 1] \text{ esetén,}$$

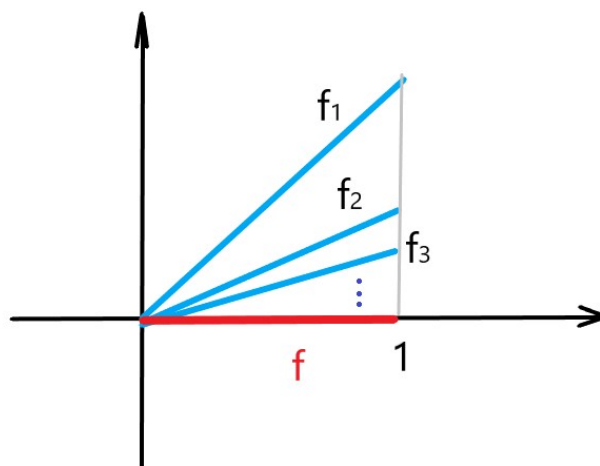
tehát igen.

Adjuk meg a határfüggvényét a $[0, 1]$ -en! Ezt úgy kapjuk, hogy minden $x \in [0, 1]$ ponthoz

hozzárendeljük azt a számot, amelyhez az $(f_n(x))$ számsorozat tart. Most ez a szám mindenhol a nulla, azaz

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ezt a függvényt pirossal berajzoltuk az alábbi ábrába.



c) Egyenletes-e a konvergencia a $[0, 1]$ -en?

$$f_n \xrightarrow{C} f \Leftrightarrow \sup_C |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

(Jelentése: a függvénysorozat elemeinek a határfüggvénytől vett "legnagyobb" eltérése nullához tart.) A példában

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \max_{x \in [0,1]} \frac{x}{n} = \frac{x}{n} \Big|_{x=1} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

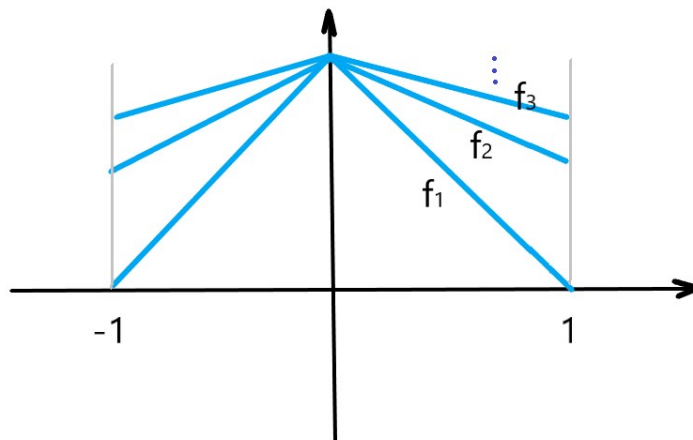
Tehát egyenletes a konvergencia.

Pl. 2. $f_n(x) = 1 - \frac{|x|}{n}$. Konvergens-e pontonként a $[-1, 1]$ intervallumon? Ha igen, mi a határfüggvény és egyenletes-e a konvergencia?

$$f_1(x) = 1 - |x|$$

$$f_2(x) = 1 - \frac{|x|}{2}$$

$$f_3(x) = 1 - \frac{|x|}{3}$$



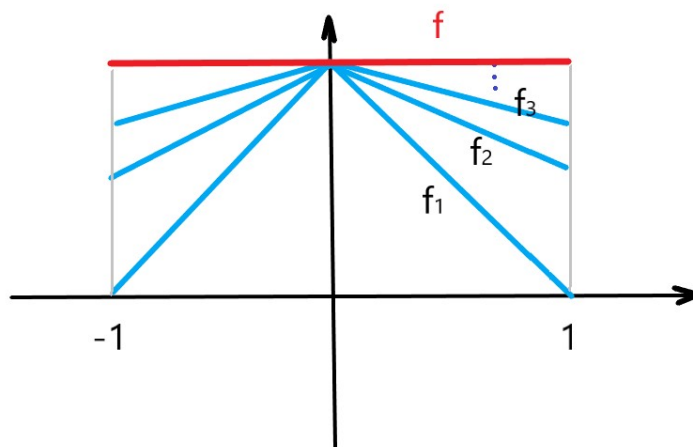
Mivel $\frac{|x|}{n} \rightarrow 0$ minden $x \in [-1, 1]$ esetén, így az $(f_n(x))$ számsorozat határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{|x|}{n} = 1 - 0 = 1 \quad \forall x \in [-1, 1],$$

így pontonként konvergens, és a határfüggvény

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{|x|}{n} = 1,$$

azaz a konstans 1 függvény.



A konvergencia egyenletességének az eldöntéséhez vizsgáljuk meg a következő határértéket:

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \left| 1 - \frac{|x|}{n} - 1 \right| = \sup_{[-1, 1]} \frac{|x|}{n} = \max_{[-1, 1]} \frac{|x|}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

tehát egyenletes a konvergencia.