

Matematika 3

8. gyakorlat

Folytassuk a függvénysorozatos példákat!

Pl. 3. Egyenletesen konvergensek-e az egész $\mathbb{R}$ -en a következő függvénysorozatok?

a.) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

b.) $g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$

Az a.) példában $f_1(x) = \sin x$, majd a sorozat második tagjának már feleakkora az amplitúdója és feleakkora a hullámhossza és í.t. A határfüggvény

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mert tetszőleges rögzített x esetén a számláló korlátos (-1 és 1 között van), és ezt szorozzuk a nullához tartó $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozattal. A határfüggvény tehát az azonosan nulla függvény. Ezenkívül

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| = \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(nx)| = \frac{1}{n} \max_{x \in \mathbb{R}} |\sin(nx)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Így egyenletes a konvergencia.

A b.) példában a függvénysorozat minden eleme -1 és 1 közötti értékeket vesz fel, de a hullámhossz egyre nő. A határfüggvény

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = 0$$

szintén minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, mert $\frac{x}{n} \rightarrow 0$, és a $\sin$ függvény folytonos. Itt is a konstans nulla tehát a határfüggvény. A konvergencia azonban nem egyenletes, ami látszik onnan, hogy az összes g_n függvénynek a nulla függvénytől vett legnagyobb eltérése 1, tehát ezen eltérések sorozata nem tart a nullához. Képlettel:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right| = 1 \not\rightarrow 0.$$

Alapkérdés: egy függvénysorozatnál az f határfüggvény átörökli-e az f_n függvények különböző jó tulajdonságait? A folytonosságnál és a Riemann-integrálhatóságnál ehhez elegendő az (f_n) egyenletes konvergenciája, míg a differenciálhatóságnál nem.

Folytonosság: ha f_n folytonos minden n -re, és $f_n \not\rightarrow f$, akkor f folytonos. (Ha csak pontonként konvergens az (f_n) , akkor a határfüggvény szakadhat, lásd előadásról az $f_n(x) = x^{n-1}$ függvénysorozatot a $[0, 1]$ intervallumon.)

Integrálhatóság: Ha $f_n \hookrightarrow f$ az $[a, b]$ -n, és $f_n \in R[a, b]$ minden n -re, akkor $f \in R[a, b]$, és

$$\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n.$$

Pl. legyen $f_n = \frac{x}{n}$ a $[0, 1]$ -en. Láttuk: $f \equiv 0$. Az összes f_n függvény integrálható a $[0, 1]$ -en, és

$$\int_0^1 f_n = \int_0^1 \frac{x}{n} dx = \frac{1}{2n} \rightarrow 0,$$

és valóban a határfüggvény integrálja ezzel megegyező:

$$\int_0^1 f = \int_0^1 0 = 0.$$

Differenciálhatóság: Vigyázat, itt nem (f_n) egyenletes konvergenciája szerepel az átöröklésről szól tételben, hanem az (f'_n) deriváltfüggvények függvénytáráé:

$$f_n \rightarrow f, f'_n \hookrightarrow g \text{ } [a, b] \text{ -n és } f_n \in C^1[a, b] \Rightarrow f \in C^1[a, b] \text{ és } f' = g.$$

Az $f' = g$ egyenlőség kicsit személetesebb formában:

$$(\lim f_n)' = \lim(f'_n).$$

Pl. Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctg x^n$ függvénytárá egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$ -en, de

$$f'(1) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1),$$

tehát az 1-ben a határfüggvény deriváltja nem egyezik meg a deriváltak határértékével. A határfüggvény:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \arctg x^n = 0,$$

hiszen $\arctg x^n$ korlátos (értéke tetszőleges x -re $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között lehet csak). A konvergencia egyenletes, mert

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \arctg x^n \right| = \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\arctg x^n| = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow 0.$$

Mivel $f(x) = 0$, így $f'(1) = 0$. Ugyanakkor

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{1+x^{2n}} n x^{n-1} = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} \Rightarrow f'_n(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \frac{1}{2} \neq f'(1) = 0.$$

Függvénysorok

Emlékeztető: Számsor: $((a_n), (S_n))$, ahol $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ az n -edik részletösszeg.

Függvénysor: $((f_n), (s_n))$, ahol $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ az n -edik részletösszeg-függvény. Itt (f_n) és (s_n) is egy-egy függvénysorozat.

Jelölés: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ vagy $\sum f_n$.

Azt mondjuk, hogy (f_n) pontonként / egyenletesen konvergál f -hez, ha (s_n) pontonként / egyenletesen konvergál f -hez. (Vigyázzunk, hogy itt az összegfüggvényt ugyanúgy f -fel jelöljük, ahogy korábban az (f_n) határfüggvényét.)

Pl. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens a következő f függvényhez:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} x.$$

Tehát itt a határfüggvény lineáris függvény, $\frac{\pi^2}{6}$ meredekséggel.

Az összegfüggvényt a legtöbb esetben nehéz megmondani, sokszor csak a konvergencia vagy a divergencia tényét tudjuk megállapítani. Érdemes ismerni a következő állítást, amely elégséges feltételt ad egy függvénysorozat **egyenletes** konvergenciájára.

Weierstrass tétele: Tegyük fel, hogy létezik olyan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens számsor, amelyre

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in C.$$

Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ egyenletesen konvergens C -n. Jelölés: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{C} f$.

Pl. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ egyenletesen konvergens-e a $[0, 1]$ -en?

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in [0, 1] \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergens.}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ -en.

Pl. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^4}$ egyenletesen konvergens-e $\mathbb{R}$ -en?

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{ konvergens.}$$

$\Rightarrow$ a függvénysor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$ -en. Megjegyezzük, hogy az $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ számsor divergens, így azzal felülről becsülni nem segítene.