

Matematika 3

9. gyakorlat

Alapkérdés: egy függvénysornál az f összegfüggvény átöröklí-e az f_n függvények különböző jó tulajdonságait?

Folytonosság: Ha az összes f_n függvény folytonos és $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \hookrightarrow f$, akkor f folytonos.

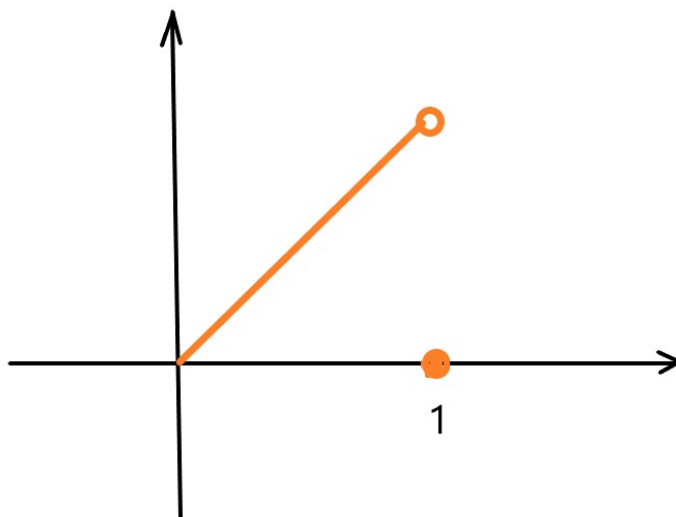
Pl. $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$, $x \in [0, 1]$. Adjuk meg az s_n részletösszeg-függvényt és az f összegfüggvényt. Egyenletes-e a konvergencia a $[0, 1]$ -en?

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n (1-x)x^i = \sum_{i=1}^n (x^i - x^{i+1}) = x^1 - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - \dots + x^n - x^{n+1} = x - x^{n+1}$$

Az x^{n+1} tag 0-hoz tart, ha $x \in [0, 1)$, és 1-hez, ha $x = 1$. Ezért

$$s_n(x) = x - x^{n+1} \rightarrow \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Tehát az alábbi ábrán narancssárgával ábrázolt összegfüggvényt kaptuk, amely szakad az 1-ben.



A függvénysorozat minden eleme folytonos függvény, az összegfüggvény azonban szakad, így a függvénysorozat nem lehet egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ -en.

Integrálhatóság: Tegyük fel, hogy az összes f_n függvény $R[a, b]$ -beli, és $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \hookrightarrow f$ az $[a, b]$ -n. Ekkor az f összegfüggvény is Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, és

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Az utóbbi összefüggés azt fejezi ki, hogy tagonként integrálhatunk, ami még jobban látszik, ha a következő alakban írjuk ezt fel:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Pl. $\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx) dx = ?$ Az integráljel mögött végtelen szummát látunk x -től függő tagokkal. Ez azt jelenti, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx)$ függvénysor összegfüggvényének (ha létezik!) az integrálja a kérdés. Jó lenne, ha lehetne tagonként integrálni, azaz helyet cserélhetne a szumma és az integrál jel. Ezt meg lehet tenni, ha egyenletesen konvergens a függvénysor a $[0, 2\pi]$ -n. Vizsgáljuk meg a Weierstrass-tétellel!

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergens.}$$

Így valóban egyenletes a konvergencia, tehát tagonként integrálhatunk. (Az egyes tagok integrálhatóságával semmi gond nincs, az összes f_n függvény folytonos).

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2} \sin(nx) dx = 0,$$

hiszen a $\sin(nx)$ függvény integrálja minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $[0, 2\pi]$ -n (erre mindig egész számú szinuszhullám esik, és egy hullámhosszúságú szakaszon az integrál 0.)

Differenciálhatóság: Itt mások a feltételek!

$$\sum f_n \rightarrow f, \quad f_n \in C^1[a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum f'_n \hookrightarrow g \text{ } [a, b]\text{-n} \Rightarrow f \in C^1[a, b] \text{ és } f' = g \text{ } [a, b]\text{-n.}$$

Az $f' = g$ egyenlőség másképpen

$$(\sum f_n)' = \sum (f'_n),$$

ami tagonkénti deriválhatóságot fejez ki.

Hatványsorok

Egy x_0 középpontú hatványsoron a következő speciális függvényt értjük:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

ahol $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ adott számok (a hatványsor együtthatói).

Egy hatványsor konvergenciahalmaza mindig x_0 középpontú intervallum. Ennek az intervallumnak a sugara

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Az intervallum határpontjairól általánosan semmit nem tudunk, ott lehet konvergens is és lehet divergens is egy hatványsor.

Pl. legyen $x_0 = 0$ és $a_k = 1$ minden k -ra. Ekkor a hatványsor a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ függvény lesz. Vegyük észre, hogy minden x -re az x hányadosú mértani sort kapjuk. Erről tudjuk régebből, hogy milyen x értékek esetén konvergens: ha $x - 1$ és 1 között van, egyébként divergens. Nézzük meg, hogy ezzel összhangban van-e, amit a konvergenciasugár fenti képlete ad:

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1}} = 1.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy a $(-1, 1)$ -en biztosan konvergens a sor, a -1 alatt és 1 fölött divergens, azt pedig máshonnan tudjuk, hogy a -1 és 1 határpontokban divergens. Amikor $x \in (-1, 1)$, akkor a sornak az összege is ismeretes: nullával induló indexelés esetén $\frac{1}{1-x}$.

Tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \text{ ha } x \in (-1, 1).$$

Fontos kérdés: Adott $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény hogyan tudunk előállítani hatványsorral? Ehhez szükséges: egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható függvény Taylor sora:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Ugyanis, ha egy függvény előáll hatványsor összegfüggvényként, akkor az a hatványsor nem más, mint f Taylor-sora.