

Matematika 3

10. gyakorlat

Pl. 1. Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát.

$$\begin{aligned}f(0) &= \sin(0) = 0 \\f'(x) &= \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1 \\f''(x) &= -\sin x \Rightarrow f''(0) = -\sin(0) = 0 \\f'''(x) &= -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1 \\f^{IV}(x) &= \sin x \Rightarrow f^{IV}(0) = \sin(0) = 0 \\&\vdots\end{aligned}$$

Így a Taylor-sor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-0)^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Megjegyezzük, hogy a $\cos$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sora pedig

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Mindkét sor hatványsugara $R = +\infty$, és a sor mindenhol előállítja a függvényt.

Pl. 2. Mi a 0 középpontú Taylor-sora az a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ill. b) $f(x) = \frac{1}{1-4x^2}$ függvénynek? Hol állítja elő f -et?

A legegyszerűbb, ha mértani sorra vezetjük vissza a feladatot!

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $x^2 \in (-1, 1)$, azaz $x \in (-1, 1)$

b)

$$\frac{1}{1-4x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (4x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^{2k},$$

ha $4x^2 \in (-1, 1)$, azaz $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Függvényközelítés Taylor-polinommal

Gyakran szükségünk lehet arra, hogy valós függvényt polinommal közelítsünk. Erre felhasználhatjuk a következő tételt: Ha f $(k+1)$ -szer folytonosan differenciálható valamely $K(x_0)$ környezeten, akkor létezik ξ pont az x és az x_0 között, amelyre

$$f(x) - T_k(f(x), x_0) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}.$$

Itt $T_k(f(x), x_0)$ a k -ad fokú Taylor-polinom:

$$T_k(f(x), x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Pl. Számítsuk ki $(0,99)^3$ értékét közelítőleg az $f(x) = x^3$ függvény $x_0 = 1$ körüli elsőfokú Taylor-polinomjának a felhasználásával. Mekkora a közelítés hibája? (A pontos érték kiszámítása nélkül válaszoljunk!)

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f(1) = 1, \quad f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3. \quad \text{Így } T_1(x^3, 0) = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2.$$

$$0,99^3 \approx 3 \cdot 0,99 + 2 = 0,97.$$

A fenti tétel alapján létezik olyan $\xi \in (0,99; 1)$ pont, hogy

$$0,99^3 - 0,97 = \frac{f''(\xi)}{2!} (0,99 - 1)^2.$$

$$f''(x) = 6x, \quad f''(\xi) = 6\xi. \quad \text{Így}$$

$$|0,99^3 - 0,97| = \left| \frac{6\xi}{2} (0,99 - 1)^2 \right| = 3|\xi| \cdot 0,01^2 \leq 3 \cdot 10^{-4}.$$

Trigonometrikus függvénysorok, Fourier-sor

Trigonometrikus sor:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (1)$$

alakú függvénysor ahol $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots$. Az ilyen függvénysorban tehát különböző hullámszámú szinusz- ill. koszinuszfüggvények vannak összeadva. Fontosabb megállapításaink:

1. Ha (1) egyenletesen konvergens egy f függvényhez, akkor az együtthatók a következő

kapcsolatban vannak f -fel:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (f \text{ integrálátlagos})$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

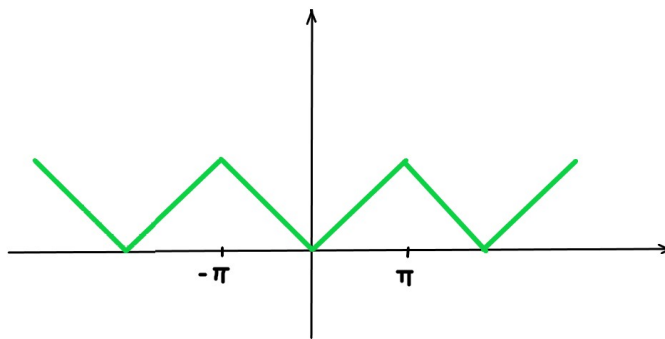
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in R[-\pi, \pi]$ egy 2π szerint periodikus függvény. Számítsunk ki hozzá a fenti képlet szerint a_0, a_k, b_k számokat, és írjuk fel az így kapott (1) sort. Elnevezés: f Fourier-sora. Ez megfelelő feltételek esetén (pl. ha f differenciálható), elő is állítja f -et.

Pl. Adjuk meg a következő f függvény Fourier-sorát:

$$f(x) = |x|, \text{ ha } x \in [-\pi, \pi], \text{ és } f(x + 2l\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall l \in \mathbb{Z}$$

(A $[-\pi, \pi]$ -n értelmezett abszolút érték függvényt periodikusan kiterjesztettük $\mathbb{R}$ -re.)



Mivel f páros, az összes b_k , $k = 1, 2, \dots$ együttható 0, így tisztán koszinuszos sort kapunk. Számítsuk ki az együtthatókat!

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = a_0 = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \left| \begin{array}{l} \text{parc. integrálás} \\ u(x) = x \\ v(x) = \frac{\sin(kx)}{k} \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{\sin(kx)}{k} dx = \frac{2}{k\pi} (\pi \sin(k\pi) - 0) - \frac{2}{k\pi} \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{k^2\pi}(\cos(k\pi) - \cos 0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ -\frac{4}{k^2\pi}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\cos(k\pi)$ 1-gyel egyenlő, ha k páros, és -1 -gyel, ha k páratlan (azaz k $2n - 1$ alakú).

Tehát a Fourier-sor:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{(2n-1)^2\pi} \cos((2n-1)x).$$