

Matematika gyakorlófeladatok 1.

1. Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Mutassuk meg, hogy ha $x \notin A$ és $x \notin B \setminus A$, akkor $x \notin B$.
2. Legyenek A, B és C tetszőleges halmazok. Mutassuk meg, hogy $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
3. Legyen $X = \{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{1, 0\}\}$. (Ez tehát egy halmazokból álló halmaz.) Mik az elemei ennek a halmaznak? Képezzük a következőket:
 $\cup X$ (az X -et alkotó halmazok uniója)
 $\cap X$ (az X -et alkotó halmazok metszete)
 $P(X)$
4. Jelölje E a Földön élő emberek halmazát. Definiáljuk $E \times E$ -n a következő relációt:

$$R_1 := \{(x, y) : x \text{ és } y \text{ ugyanabban a házban lakik}\}$$

Mi az értelmezési tartománya és az értékkészlete ennek a relációnak? Milyen tulajdonságai vannak? Ekvivalenciareláció-e? Ha igen, mik az ekvivalenciaosztályok?

5. Jelölje F a férfiak halmazát. Definiáljuk $F \times F$ -n a következő relációt:

$$R_2 := \{(x, y) : x \text{ öccse } y\text{-nak}\}$$

Vizsgáljuk meg a tulajdonságait! Ekvivalenciareláció-e, szigorú rendezési reláció-e?

6. Rendezési relációnak (nem szigorú!) a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációkat nevezzük. Ekkor xRy helyett az $x \leq y$ jelölést használjuk. Legyen R_3 a következő, $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ -beli reláció:

$$R_3 := \{(x, y) : x|y\}, \text{ (azaz } x \text{ osztója } y\text{-nak).}$$

Mutassuk meg, hogy rendezési reláció. Teljes-e a rendezés? Adjuk meg egy felső korlátját az $\{1, 2, 3\}$ halmaznak ebben a rendezésben! Jó-e felső korlátnak az 5? Van-e ezen rendezésben $\mathbb{N}_0$ -nak legnagyobb eleme?

7. Mutassuk meg, hogy a négyzetszámok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú.
8. Mutassuk meg, hogy megszámlálhatóan végtelen sok megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz uniója is megszámlálhatóan végtelen számosságú.

9. Legyen $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ egy számtest. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{0} \cdot a = \mathbf{0}$ minden $a \in \mathbb{F}$.
10. Legyen $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ egy számtest, $a, b \in \mathbb{F}, a \neq \mathbf{0}, a \cdot b = \mathbf{0}$. Mutassuk meg, hogy ekkor $b = \mathbf{0}$.
11. Határozzuk meg az $A = \{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ halmaz szupremumát és infimumát!
12. Injektív-e az $f(x) = \frac{1}{1-x}, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ függvény? Ha igen, $f^{-1} = ?$

Megoldások:

1. Indirekt. Tegyük fel, hogy $x \notin A, x \notin B \setminus A$, és $x \in B$. Ekkor $x \in B$ és $x \notin A$ miatt $x \in B \setminus A$, tehát ellentmondásra jutunk.
2. 1.) Tegyük fel, hogy $x \in (A \setminus B) \setminus C$. Ekkor $x \in A$ és $x \notin B$, és $x \notin C$. $\Rightarrow x \in A$ és $x \notin C$ miatt $x \in A \setminus C$, $x \notin B$ miatt pedig $x \notin B \setminus C$. $\Rightarrow x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
 2.) Tegyük fel, hogy $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$. Ekkor $x \in A \setminus C$ és $x \notin (B \setminus C)$. $\Rightarrow x \in A$ és $x \notin C$, és $x \notin B \setminus C$. A két utóbbi állításból következik, hogy $x \notin B$. Tehát: $x \in A$ és $x \notin B$, és $x \notin C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$.
3. X elemei: az $A = \{\{1, 2\}, \{1\}\}, B = \{1, 0\}$
 $\cup X = A \cup B = \{\{1, 2\}, \{1\}, 1, 0\}$
 $\cap X = A \cap B = \emptyset$
 $P(X) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, X\}$
4. $D(R_1)$: azok az emberek, akikhez található olyan ember, akivel egy házban lakik, vagyis a házban lakó emberek halmaza. $R(R_1)$ ugyanez. Reflexív (minden ember egy házban lakik önmagával), szimmetrikus (ha x ugyanabban a házban lakik, mint y , akkor y ugyanabban a házban lakik, mint x), tranzitív (ha x egy házban lakik y -nal és y egy házban lakik z -vel, akkor x egy házban lakik z -vel), tehát ekvivalenciareláció. Az egy házban lakó emberek alkotnak egy ekvivalenciaosztályt.
5. $D(R_2)$: azoknak a férfiaknak a halmaza, akiknek van bátyjuk, $R(R_2)$: azoknak a férfiaknak a halmaza, akiknek van öccsük. Irreflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció. Így nem ekvivalencia- és nem szigorú rendezési reláció.
6. Rendezési reláció, mert reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Így $x|y$ helyett használhatjuk az $x \leq y$ jelölést. A rendezés nem teljes, mert pl. 2 és 3 nem hasonlítható össze. A megadott halmaznak felső korlátja pl. a 6, de az 5 nem. $\mathbb{N}_0$ -nak ebben a rendezésben a 0 a legnagyobb eleme, mert a 0-nak minden természetes szám az osztója, még a nulla is.

7. Jelölje X a négyzetszámok halmazát, azaz $X = \{1, 4, 9, 16, \dots\} = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. Ekkor X és $\mathbb{N}$ között bijekció létesíthető a következő $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ függvény segítségével: $f(n) = n^2$.
8. Jelölje a halmazokat $A_1, A_2, \dots$. Az A_1 halmaz elemeit meg lehet sorszámozni, írjuk fel ezeket az elemeket az első sorba. Az A_2 halmaz elemei szintén sorbarendeázhetők, ezeket írjuk a második sorba és í.t. Ha az A_i halmaz j -edik elemét a_{ij} -vel jelöljük, akkor a következő elrendezést kapjuk.

$$\begin{array}{cccc} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & \dots \\ \vdots & & & \end{array} \quad (1)$$

A táblázatban lévő elemek és $\mathbb{N}$ között bijekció létesíthető: a nulladik elem legyen a táblázat bal felső eleme, utána 1-es és 2-es sorszámmal lássuk el az első elemtől jobbra és lefelé elhelyezkedő elemeket ($1 \leftrightarrow a_{11}$, $2 \leftrightarrow a_{20}$), és í.t. átlósan.

9. $\mathbf{0} \cdot a = (\mathbf{0} \cdot a) + \mathbf{0} = (\mathbf{0} \cdot a) + (a + (-a)) = (\mathbf{0} \cdot a + a) + (-a) = (\mathbf{0} \cdot a + a \cdot 1) + (-a) = (a \cdot \mathbf{0} + a \cdot 1) + (-a) = a \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{1}) + (-a) = (a \cdot \mathbf{1}) + (-a) = a + (-a) = \mathbf{0}$.
10. $b = b \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot b = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot a^{-1} = \mathbf{0}$.
11. $\sup A = 2$, mivel a 2 felső korlátja a halmaznak, és eleme a halmaznak. Megmutatjuk, hogy $\inf A = 1$. Az 1 nyilvánvalóan alsó korlát. Belátandó még, hogy tetszőleges $x > 1$ esetén x nem alsó korlátja A -nak, vagyis létezik olyan $a \in A$ szám, amelyre $a < x$. Az Archimédész-axióma szerint minden nyílt intervallumnak van racionális pontja, így az $(1, x)$ intervallumon található $b = \frac{p}{q}$ racionális szám. Mivel $b > 1$ ezért itt $p > q$. Ha p éppen 1-gyel nagyobb q -nál, akkor $b \in A$, és így $a = b$ jó lesz. Ha pedig p legalább 2-vel nagyobb q -nál, akkor a számlálót $q+1$ -re lecsökkentve a kapunk megfelelő elemet, tehát $a = \frac{q+1}{q}$. (Ez biztosan eleme $(1, x)$ -nek is, és A -nak is.)
12. Injektív, ha $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$\frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-x_2} \Leftrightarrow 1-x_1 = 1-x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

tehát injektív. $D(f^{-1}) = R(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = y \Rightarrow \frac{1}{y} = 1-x \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{y} = f^{-1}(y).$$