

Matematika gyakorlófeladatok 2.

1. Metrika-e $\mathbb{R}$ -en a $\rho(x, y) = e^{x-y}$ függvény?
2. Adjuk meg az $x = (1, 0, -1)$ és az $y = (2, 3, 0)$ $\mathbb{R}^3$ -beli elemek távolságát a következő metrikákban: $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty, \rho_d$ (diszkrét metrika).
3. Adjuk meg a $[0, 1]$ zárt intervallumon értelmezett $f(x) = 2x$ és $g(x) = x$ függvény távolságát a $(C[0, 1], \rho_\infty)$ és a $(C[0, 1], \rho_f)$ metrikus térben.
4. Igaz-e, hogy az $f(x) = x^2$ függvény benne van az azonosan nulla függvény 1 sugarú környezetében
 - a.) a $(C[-1, 1], \rho_f)$ metrikus térben?
 - b.) a $(C[-1, 1], \rho_\infty)$ metrikus térben?
5. Teljes metrikus tér-e $(H, |\cdot|)$, ahol
 - a.) $H := [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
 - b.) $H := [0, 1] \cup \{-1\}$?
6. Kontrakció-e az $f(x) = e^{2x}$ függvény
 - a.) a $[0, 1]$ intervallumon?
 - b.) a $[-2, -1]$ intervallumon?Ha igen, adjunk meg hozzá megfelelő q kontrakciós számot.
7. A $4x = e^{-x}$ egyenletet fixpont-iterációval szeretnénk megoldani. Határozzunk meg ehhez egy megfelelő zárt intervallumot. Hányat kell lépnünk a 10^{-4} -es pontosság eléréséhez ezen intervallum valamelyik végpontjából indulva?
8. Normát definiál-e $\mathbb{R}^3$ -on a következő függvény?

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto |x_1 + x_2 + x_3|$$

9. A $(C[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \|\cdot\|_f)$ normált térben az $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ függvény benne van-e a $g(x) = \frac{1}{2} \cos x$ függvény 6 sugarú környezetében?
10. Konvergens-e, és ha igen, hova tart az alábbi $\mathbb{R}^2$ -beli vektorsorozat? A maximum-normában adjunk $\varepsilon = 10^{-4}$ -hez megfelelő N küszöbindexet!

$$x_n = \left(1 - \frac{5}{n}, \frac{1}{1+n^2}\right)$$

11. Jordan-mérhető-e? Ha igen, adjuk meg a Jordan-mértékét!

a) $Q_1 := [0, 2]^2 \cup ([1, 3] \times [0, 3]) \cup ([3, 4] \times [2, 3]);$

b) $Q_2 = \{(x, y) : x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq 1 - x^2\}.$

12. Jordan nullmértékű-e?

a) $Q_3 =$ a $[0, 1]^2$ egységnégyzet határpontjainak a halmaza;

b) $Q_4 = \{(x, 1) : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}.$

Megoldások:

1. Nem, ugyanis nem teljesül, hogy

$$e^{x-y} = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(a metrika a.) tulajdonsága), hiszen $x = y \in \mathbb{R}$ esetén $\rho(x, y) = e^{x-y} = e^0 = 1.$

2. $\rho_1(x, y) = |1 - 2| + |0 - 3| + |-1 - 0| = 5$

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 3)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{11}$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{|1 - 2|, |0 - 3|, |-1 - 0|\} = 3$$

$$\rho_2(x, y) = 1$$

3. $\rho_\infty(f, g) = \max_{[0,1]} |2x - x| = \max_{[0,1]} x = 1$

$$\rho_f(f, g) = \int_0^1 |2x - x| dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

4. a.) $\rho_f(f, 0) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$, tehát igaz.

b.) $\rho_\infty(f, 0) = \max_{x \in [-1,1]} |x^2 - 0| = 1$, tehát nem igaz.

5. a.) Nem, mert pl. az $(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})$ ($n > 2$) sorozat H -beli és $\rightarrow \frac{1}{2}$. Mivel $\mathbb{R}$ -ben konvergens, így Cauchy-sorozat, de a határértéke nem H -beli, mert $\frac{1}{2} \notin H$.

b.) Igen, mert H zárt ($H' = [0, 1] \subset H$).

6. a.) Nem kontrakció, ugyanis $x = 0, y = 1$ esetén $|f(x) - f(y)| = e^2 - 1 > |x - y| = 1$.

b.) $|f'(x)| = 2e^{2x} \leq 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} < 1$, ha $x \in [-2, -1]$. (Itt felhasználtuk, hogy az $|f'(x)| = 2e^{2x}$ függvény a $[-2, -1]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, így -1 -ben veszi fel a maximumát.) Tehát f a $[-2, -1]$ intervallum kontrakció $q = \frac{2}{e^2} \approx 0.2707$ mellett.

7. Grafikusan a megoldás az $y = 4x$ és az $y = e^{-x}$ függvény metszéspontjának az x koordinátája. Csak egy megoldás van, ugyanis az $y = 4x$ függvény szigorúan monoton nő, az $y = e^{-x}$ függvény pedig szigorúan monoton csökken. Továbbá a megoldás a $[0, 1]$ intervallumban van, ugyanis a $\phi(x) = 4x - e^{-x}$ folytonos függvény

az $x = 0$ -ban negatív, az $x = 1$ -ben pedig pozitív értéket vesz fel, tehát $x = 0$ és $x = 1$ között biztosan van zérushelye.

Írjuk át az egyenletet $x = \frac{1}{4}e^{-x}$ alakba. Ekkor a megoldás az $f(x) = \frac{1}{4}e^{-x}$ függvény fixpontja.

Ezen f -re teljesülnek a fixponttétel feltételei a $[0, 1]$ -en, ugyanis

a.) $|f'(x)| = \frac{1}{4}e^{-x} < \frac{1}{4}$, ha $x \in [0, 1]$, tehát f kontrakció a $[0, 1]$ -en (amely teljes metrikus tér a szokásos $|\cdot|$ metrikával), kontrakciószámnak használható a $q = \frac{1}{4}$.

b.) f a $[0, 1]$ -en beleképez a $[0, 1]$ -be, ugyanis ha $x \in [0, 1]$, akkor $f(x) \in [\frac{1}{4e}, \frac{1}{4}] \subset [0, 1]$.

Az n lépésszám meghatározásához írjuk fel a fixponttételben szereplő hibabecslő formulát:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

Ha az $x_0 = 0$ pontból indulunk, akkor $x_1 = \frac{1}{4}e^{-0} = \frac{1}{4}$. A q helyébe $\frac{1}{4}$ -et írva:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{(\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} < 10^{-4},$$

ha

$$4^n > \frac{1}{3} \cdot 10^4.$$

Logaritmust véve

$$n \lg 4 > \lg \left(\frac{10000}{3} \right).$$

Ebből $n > 5.85$, azaz elegendő hatot lépünk.

8. Nem, ugyanis pl. az $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 0)$ vektorhoz is nullát rendel hozzá, nem csak a $(0, 0, 0)$ -hoz, így sérül az 1. normatulajdonság.

9. Az f és a g függvény távolsága

$$\|f - g\|_f = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos x - x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \dots = 1 + \frac{\pi^2}{6} \approx 5,93 < 6 \Rightarrow$$

benne van. (Az integrandus felírásánál kihasználtuk, hogy a g függvény végig az f fölött halad, ezért g -ből vontuk ki f -et.)

10. Oda tart, ahova koordinátánként, vagyis az $(1, 0)$ vektorhoz. Megfelelő küszöbindex meghatározása:

$$\left\| \left(1 - \frac{5}{n}, \frac{1}{1 + n^2} \right) - (1, 0) \right\|_{\infty} = \max \left\{ \left| -\frac{5}{n} \right|, \left| \frac{1}{1 + n^2} \right| \right\} = \frac{5}{n} < \varepsilon$$

teljesül, ha

$$n > \frac{5}{\varepsilon},$$

így megfelelő küszöbindex lesz a következő:

$$N = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{5}{10^{-4}} \right\rceil + 1 = 50001.$$

11. a) A Q_1 halmaz $\mathcal{I}$ -beli, így Jordan-mérhető. Állítsuk elő μ_0 -diszjunkt téglalapok uniójaként, és adjuk össze a mértékeiket. Pl.:

$$Q_1 = ([0, 3] \times [0, 2]) \cup ([1, 4] \times [2, 3]),$$

$$\mu(Q_1) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 9.$$

b) $\mu(Q_2) = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = [x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$

12. a) A Q_3 intervallum, így Jordan-mérhető. A határpontjainak a halmaza tehát Jordan-nullmértékű.

b) A Q_4 halmaz azon $\mathbb{R}^2$ -beli pontok halmaza, amelyek első koordinátája 0 és 1 közé eső racionális szám, második koordinátája pedig 1. Ezen pontokat le lehet fedni tetszőleges ε esetén egy ε -nál kisebb magasságú és 1 szélességű téglalappal, amelynek a mértéke $< \varepsilon$. Így Q_4 Jordan-nullmértékű.