

Nemlineáris egyenlet gyökének megkeresése fixpont-iterációval

Feladat: az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása.

Emlékeztető: Nemlineáris egyenletek megoldására az egyik lehetőség a Banach-féle fixponttétel alkalmazása. Ehhez $\phi(x) = x$ alakban írjuk fel a megoldandó egyenletet. Fontos, hogy a ϕ függvény kontrakció legyen, és olyan zárt H halmazon (pl. zárt intervallum) legyen értelmezve, amely tartalmazza a ϕ értékkészletét. Ekkor létezik egyetlen fixpontja, amely megkapható az

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad x_0 \text{ tetszőleges } H\text{-beli elem}$$

rekurzióval definiált sorozat határértékeként. Ez a fixpont az egyenlet megoldása.

Feladat: Oldjuk meg fixpont-iterációval az $x^3 = x + 1000$ egyenletet. Írjunk Matlab-függvényt a fixpont-iteráció elvégzésére. Bemenet ne legyen, a kimenet pedig álljon a következőkből:

x_star: a közelítések sorozata (vektor);

fverték: f értéke az utolsó pontban (szám);

iter: az iterációs lépések száma

Megoldás: Most $f(x) = x^3 - x - 1000$. Mi lesz a $\phi(x)$ függvény?

Az egyenlet megoldása a $[10, 11]$ intervallumon van. A ϕ lehetne $x^3 - 1000$, de ez a $[10, 11]$ intervallumon nem kontrakció (és nem is képez bele). Helyette $\phi(x) = (x+1000)^{1/3}$ már megfelelő lesz.

A fontosabb pontok a programban:

- Kezdőértéknek induljunk a megadott intervallum egyik végpontjából.
- Az iterációban a korábbi értékre mindig alkalmazzuk ϕ -t.
- Ehhez meg kellene adni a ϕ függvényt. Erre több lehetőség is kínálkozik. Megadhatjuk a program elején is a következő sorral:

```
phi = @(x)((x+1000)^(1/3));
```

Vagy: az adott könyvtárban létrehozhatjuk külön fájlban is a `phi.m` nevű függvényt.

- Mikor álljon le az iteráció? Ha elértünk egy max. iterációs számot, vagy ha az iteráció már elég jól kielégíti az $f(x) = 0$ egyenletet (maxit és hiba rögzítése az elején).
- A hiba számításához érdemes f -et is megadni az elején:

```
f = @(x)(x^3-x-1000);
```

- Legyen benne egy lépésszámláló.

fixpont.m:

```
function [x_star, fverték, iter] = fixpont
% Fixpont-iteracioval megoldja az f(x)=0 egyenletet. Az x=phi(x) atirast es
% a gyokot tartalmazo intervallumot is nekunk kell megadni.
% x_star: a megoldashoz konvergalo pontsorozat, fverték: f erteke az utolso
pontban,
% iter = hanyat lepett
f = @(x)(x^3-x-1000);
phi = @(x)((x+1000)^(1/3));
interval = [10 11]; % az intervallum kezdo- es vegpontjabol allo vektor
hiba = 1e-6; % legfeljebb ekkora hibaval szeretnenk megkapni a megoldast
maxit = 60; % legfeljebb ennyi lepest tegyen
x(1) = interval(1); % az intervallum bal oldali vegpontjabol inditjuk
y = f(x(1));
it = 0;
while abs(y) > hiba & it < maxit
    it = it + 1;
    x(it+1) = phi(x(it));
    y = f(x(it+1));
end
x_star=x'; % Oszlopvektorkent tarolja el a pontsorozatot
iter = it;
fverték = y;
```

Indítás a parancsablakból:

```
» [x_star, fverték, iter] = fixpont
```