

Sajátértékek és sajátvektorok kiszámítása

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sajátértékének nevezzük a λ számot, ha létezik olyan $x \neq 0$ vektor, amelyre $Ax = \lambda x$. Ekkor x a λ -hoz tartozó sajátvektora A -nak. Egy λ szám pontosan akkor sajátértéke A -nak, ha $\det(A - \lambda I) = 0$. A $\det(A - \lambda I)$ polinomot A karakterisztikus polinomjának nevezzük.

A Matlabban az A mátrix karakterisztikus polinomját

```
poly(A)
```

adja meg. Ez egy $n + 1$ elemű vektor formájában a polinom együtthatóit tartalmazza. A `roots(v)` parancs megadja a zérushelyeit annak a polinomnak, amelynek az együtthatói a v vektor elemei. Így tehát

```
roots(poly(A))
```

megadja A sajátértékeit. A másik, egyszerűbb lehetőség a sajátértékek kiszámítására:

```
eig(A)
```

(Ritka mátrixok esetén az `eigs` parancsot használjuk.) A

```
[V D] = eig(A)
```

sor beírására nemcsak a sajátértékeket, hanem a sajátvektorokat is megkapjuk. A sajátvektorok a V mátrix oszlopai, a sajátértékek pedig a D diagonális mátrix főátlójában lévő számok. Pl.

```
» A = [3 2 -2; -3 -1 3; 1 2 0];
```

```
» [V D] = eig(A)
```

```
V =
```

```
-0.5774 0.7071 0.0000  
0.5774 0.0000 0.7071  
-0.5774 0.7071 0.7071
```

```
D =
```

```
-1.0000 0 0  
0 1.0000 0
```

```
0 0 2.0000
```

A sajátvektorok normalizálva vannak. Ha ezt nem szeretnénk, akkor

```
» [V,D]=eig(A,'nobalance')
```

a sajátértékeket olyan formában adja meg, mintha csak papíron számoltuk volna ki:

V =

```
-1.0000 1.0000 0.0000  
1.0000 0.0000 1.0000  
-1.0000 1.0000 1.0000
```

D =

```
-1.0000 0 0  
0 1.0000 0  
0 0 2.0000
```

A sajátértékeket vektorban is eltárolhatjuk:

```
» evalues=diag(D)
```

Lineáris algebrából ismert a diagonalizálható mátrix fogalma: olyan négyzetes A mátrix, amely felírható CDC^{-1} alakban, ahol a D mátrix diagonális, C pedig invertálható. (Ezzel az alakkal könnyen hatványra emelhető, invertálható, polinomba vagy hatványsorba helyettesíthető a mátrix...) Ismeretes, hogy egy n -szer n -es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha létezik n db lineárisan független sajátvektora. Ezt eldönthetjük úgy, hogy megvizsgáljuk az `eig` paranccsal kapott V mátrix rangját. Amennyiben ez a rang n , a mátrix diagonalizálható, és $A = VDV^{-1}$, ahol V és D az `eig` paranccsal kapott mátrixok. (Emlékeztetőül: vagy A mátrix inverzének kiszámítására használható a Matlabban az `inv(A)` utasítás is, de $V*D*inv(V)$ helyett inkább $V*D/V$ javasolható, mert gyorsabban végrehajtódik.)

A sajátértékek és sajátvektorok szemléltetésére a Matlabban található egy `eigshow` nevű beépített függvény. Beírására megjelenik egy ablak. A felső menüsor felkínál egy sor 2-szer 2-es mátrixot, és az itt a kiválasztott mátrix sajátértékeit és sajátvektorait tanulmányozhatjuk. Az ábrán először az x irányú egységvektor és annak képe (Ax) jelenik meg. Az egérrel kijelölhető tetszőleges vektor (zöld), amelynek a képe kirajzolódik (kék).

Ha sikerül egy egyenesbe hoznunk a két szakaszt, akkor sajátvektort találtunk. Láthatjuk, hogy a különböző irányú sajátvektorok képe ellipszist rajzol ki. Az hossza adja meg a megfelelő sajátértéket. Valamikor nem sikerül az egy egyenesbe hozás: ez azt jelenti, hogy nincs valós sajátérték.