

5. gyakorló feladatsor

Mátrixműveletek, mátrixok determinánsa

1. Legyenek adva a következő mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1], \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Mely mátrixkifejezések léteznek az alábbiak közül, és mennyi az értékük?

a.) $A \cdot D$ b.) $A^2 + A$ c.) $B^2 - 2B$ d.) $C + D^T$ e.) $A^T A + CC^T$ f.) $BB^T + C$

2. Igaz-e, hogy ha $A \in M_n$ és $B \in M_n$, akkor $A \cdot B = B \cdot A$? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, mondjunk ellenpéldát!
3. Ha az $A \in M_n$ és $B \in M_n$ mátrixokra $AB = BA$, akkor azt mondjuk, hogy A és B kommutál. Mondjunk példát kommutáló mátrixokra! Mondjunk példát olyan mátrixra is, amelyik minden más (vele azonos méretű) mátrixszal kommutál.
4. Mely összefüggések igazak tetszőleges $A, B \in M_n$ mátrixok esetén? Az igazakat bizonyítsuk be, a hamisakra keressünk ellenpéldát!
- a.) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 b.) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
 c.) $A^2 - I = (A - I)(A + I)$, ahol I az $n \times n$ -es identitásmátrix

5. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát:

a.) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ b.) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ c.) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ d.) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 100 & 100 & 100 & 100 \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1000 \end{bmatrix}$

6. Számítsuk ki a következő, komplex elemű mátrix négyzetét:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 + i \end{bmatrix}$$