

4. gyakorló feladatsor

Megoldások

1. a.) A megoldást $z = a + ib$ alakban keressük.

$$\frac{5}{a+ib} + \frac{2}{1+3i} = 1 \quad / \cdot (a+ib)(1+3i)$$

$$5(1+3i) + 2(a+ib) = (a+ib)(1+3i)$$

$$5 + 2a + 15i + 2ib = a + ib + 3ai - 3b$$

A két oldalon a valós és a képzetes részeknek külön-külön meg kell egyezniük: $5+2a = a-3b$ és $15+2b = b+3a$. Az egyenletrendszer megoldása: $a = 4$, $b = -3$. A megoldás tehát $z = 4 - 3i$.

b.) $z = a + ib$ alakban keresve a megoldást: $a - ib + 3 - i = a^2 + b^2$. A valós részek egyenlőségéből: 1.) $a + 3 = a^2 + b^2$, a képzetes részekéből: 2.) $-b - 1 = 0 \Rightarrow b = -1$. Ezt az 1.) egyenletbe beírva: $a^2 - a - 2 = 0$. Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai: $a_1 = 2$, $a_2 = -1$. Az eredeti egyenletnek tehát két megoldása van: $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -1 - i$.

2. c.), f.)

3. a.) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2)$

b.) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ (minden számpárt helybenhagy)

c.) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (0, 0)$ (minden számpárhoz a $(0, 0)$ -t rendeli)

d.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (-x, 0, x)$

e.) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2)$ (megcseréli minden számhármass második és harmadik elemét)

f.) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (-5x_1 + 3x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 + 4x_2)$

4. Igen, hiszen két tetszőleges vektor összegének tükörképe a tükörképeik összege, és egy tetszőleges vektor adott számszorosának tükörképe a tükörkép számszorosa.

5. Azt az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

mátrixot keressük, amelyre

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Végezzük el a bal oldali mátrixszorzásokat az egyelőre ismeretlen mátrixszal. Így a következő egyenletrendszerekhez jutunk:

$$\begin{array}{lcl} 1 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{12} = 3 & \text{és} & 3 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} = 4 \\ 1 \cdot a_{21} + 2 \cdot a_{22} = 8 & & 3 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} = 14 \end{array}$$

Ezt a négy egyenletet a négy ismeretlen mátrixelemre megoldva kapjuk: $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 4, a_{22} = 2$. Így a keresett mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$