

8. gyakorló feladatsor

Megoldások

1. a.) 1. Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.)-(1.), (3.)-(1.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

Így az $x_1 + x_2 = 3$, $-x_2 + x_3 = 3$, $x_3 = 5$ egyenletekhez jutottunk.

Ezekből $x_3 = 5$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$.

2. Gauss-Jordan-eliminációval: tovább folytatva a táblázat átalakítását:

$$\xrightarrow{(2.)-(3.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.) \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{(1.)-(2.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

A jobb oldalon leolvasható a megoldás: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$.

b.) 1. Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.)-(1.), (3.)-2 \cdot (1.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(3.)-(2.)/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{14}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{(3.) \cdot (-\frac{3}{14})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Így az $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$, $3x_2 - x_3 = -4$, $x_3 = 1$ egyenletekhez jutottunk.

Ezekből $x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = -1$.

2. Gauss-Jordan-eliminációval: tovább folytatva a táblázat átalakítását:

$$\xrightarrow{(2.)+(3.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.)/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(1.)-2 \cdot (3.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1.)+(2.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

A jobb oldalon leolvasható a megoldás: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

c.) A Gauss-Jordan-elimináció nem alkalmazható, mert nem négyzetes az együtthatómátrix.

Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.)+2\cdot(1.), (3.)+2\cdot(1.)} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 12 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(3.)-(2.)} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right]$$

Ezzel a

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 2 \\ & +4x_2 & x_3 & +4x_4 & = & 8 \\ & & x_3 & -2x_4 & = & 4 \end{cases}$$

egyenletrendszerhez jutottunk. Tetszőleges értéket adhatunk egy ismeretlennek, pl. az x_4 -nek: $x_4 := p \in \mathbb{R}$ tetsz. Ekkor a 3. egyenletből $x_3 = 4 + 2p$, a másodikból $x_2 = 1 - \frac{3}{2}p$, és az elsőből $x_1 = 3 + \frac{3}{2}p$.

2. a.)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.)-\frac{7}{3}\cdot(1.), (3.)-\frac{5}{3}\cdot(1.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(2.)\cdot\frac{3}{4}, (3.)\cdot\frac{3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(3.)-(2.)} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Egy csupa nulla sort kaptunk: tetszőlegesen megválaszthatjuk x_3 értékét: $x_3 := p \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám. Ekkor $x_2 = -2p$, $x_1 = p$. Tehát az összes megoldás:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} p \\ -2p \\ p \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

Megjegyzés: Homogén lineáris egyenletrendszernél az egyenletrendszer átalakítása során a jobb oldalon mindig nullák vannak, lásd fent. Ezért homogén lineáris egyenletrendszernél a szabad tagok oszlopvektorát fölösleges feltüntetni a táblázatban. (A következő példában már nem írjuk ki.)

b.)

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & -5 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{(1.)\cdot(-1)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & -5 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{(3.)-(1.)\cdot 7, (4.)-(1.)\cdot 4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2.)\cdot(-1), (3.)/(-5), (4.)/(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(3.)-(2.), (4.)-(2.)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezzel az $x_1 - x_3 - 2x_4 = 0$, $x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$ egyenletrendszerhez jutottunk. Két nulla sor van, így válasszuk meg x_4 és x_3 értékét tetszőlegesen: $x_4 := p \in \mathbb{R}$, $x_3 := q \in \mathbb{R}$. Ekkor $x_2 = q + 2p$ és $x_1 = q + 2p$, azaz az összes megoldás:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} q + 2p \\ q + 2p \\ q \\ p \end{bmatrix}, \quad p, q \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges számok.}$$

3.

$$a.) A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad b.) B^{-1} = \begin{bmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{bmatrix} \quad c.) C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A B inverzének kiszámítása részletesen:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(2.)+(1.)\cdot 2, (3.)-(1.)\cdot 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{(3.)-(2.)\cdot 11} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(3.)\cdot(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{(1.)+(3.)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 26 & 11 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1.)+(2.)\cdot 3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 32 & 14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$